# DISQUISITIO MATHEMATICA
## IN CAUSSAM PHYSICAM
### FIGURÆ, ET MAGNITUDINIS
### TELLURIS NOSTRÆ.

# P. D. PAULLI FRISII

MEDIOLANENSIS

CONGREGATIONIS D. PAULLI

CLERICI REGULARIS,

IN LAUDENSI ACADEMIA PRIMUM; DEINDE IN REGIO CASALENSI GYMNASIO PUBLICI PHILOSOPHIÆ PROFESSORIS, ET STUDIORUM PRÆFECTI

# DISQUISITIO MATHEMATICA IN CAUSSAM PHYSICAM FIGURÆ, ET MAGNITUDINIS TELLURIS NOSTRÆ.

---

*Magna opera Domini,*
*Exquisita in omnes voluntates ejus.*
Psal. 110.



Magna opera Domini,

---

MEDIOLANI; MDCCLI.

---

IN REGIA CURIA.

*Superiorum permissu.*

# DONATO DE SYLVA
## COMITI BLANDERATENSI

PAULLUS FRISIUS
S. P. D.

*UT hasce meas, qualescumque sint, de vera Globi Terraquei Figura, & Magnitudine lucubrationes, non alio, quam Tuo nomine inscriberem; quum ea, qua me, meosque foves, propensio, tum summa, qua in Mathematicis, Philosophicis, cæ-*

*terif-*

*terisque facultatibus excellis, peritia postulabat. Hæc non potui præterire. Quæ de Tuis laudibus, atque promeritis prædicare nunquam satis possem, Te serio probibente, ne possum quidem commemorare. Vale.*

*Dabam Laudæ Pompejæ Kal. Apr. anni MDCCLI.*

# ANTECESSIO.

Quum multa sint, quæ hoc nostro sæculo maxime Christianissimi Regis munificentia, Regiæ Parisiensis Scientiarum Academiæ opera, atque hominum clarissimorum Cassini utriusque, Maraldi, de la Grive, de la Caille, de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, Outhier, Celsius, Goudin, Bouguer, de la Condamine incredibili studio in Galliis, Lapponia, Peruviaque circa Telluris nostræ Magnitudinem, ac Figuram diligentissime observata sint; eos ipse de Litteraria Republica optime meritos semper duxi, qui observationum earumdem sequelas, illationesque alacriter persequerentur. Quia tamen plerique omnes hucusque, aut nihil pro Figura Telluris determinanda ex iis observationibus deduci posse cum Geometra celeberrimo Ruggero Boscovik (*a*) autumarunt, aut exinde cum Ill. Clairaut (*b*), Bouguer (*c*), aliisque contra incomparabilem virum, ac prope divinum Isaacum Newton insurgentes, admirabilem ipsius theoriam facto minus respondentem dixerunt, assignatamque in prop. 19. lib. 3. Princip. Mathem. terrestrium axium proportionem a vera absonam omnino esse; alios mihi observationibus parum, alios nimis tribuere visum est, omnes ferme, oppositis erroribus peccasse, ubi res neque aurificis lance, neque molitoris, ut ajunt, statera librandæ sunt. Esto ipsa D. De Maupertuis formula

$$D = \frac{E - F}{3E(S^2 - s^2)}$$

cujus ope ex datis quibuscumque duobus Meridiani terrestris gradibus telluris nostræ Figuram perbelle (*d*) expediit. In ea $D$ est differentia semiaxis terræ, & semidiametri Æquatoris, $E$ lon-

(*a*) Differt. 2. de Fig. Terræ.
(*b*) Theor. de la Fig. de la Ter. par. 2. chap. 5.
(*c*) Fig. de la Ter. sect. 6.
(*d*) Fig. de la Ter. determ. par les observ. liv. 1. part. 2. chap. 9.

$E$ longitudo gradus ab Æquatore remotioris, $F$ longitudo propioris, $S$ ſinus rectus latitudinis prioris gradus, $s$ vero ſinus rectus alterius. Palam eſt, quod ſi gradus $E$ ſtatuatur hexapedarum Pariſienſium 57437. 9, qualis ex obſervationibus prodit in latitudine 66° 20', & $F$ hexapedarum 57183, qualis ſimiliter prodiit in latitudine 49° 22', ſubſtitutionibus in æquatione adducta rite factis, emerget $D = \frac{1}{177}$, adeoque axis Terræ ad diametrum ſibi normalem erit, ut 177 : 178. Quid ergo? Anne propterea hæc erit vera axis ejuſdem, & diametri proportio? Vere ipſi inter ſe non erunt ut 229 : 230? Minime gentium. Quid ſi enim errores ii in aſſignatis graduum menſuris prolapſi eſſent, qui in tam longis, intricatiſque operationibus evitari non poſſunt? Quid ſi ii ipſi errores veram terreſtrium axium proportionem 229 : 230 ad aliam 177 : 178 reducerent? Certe ubi retenta ſecundi gradus dimenſione ponamus in primo 60 hexapedis erratum eſſe, aut in utroque hexapedis 30, ſubſtitutionibus ut ſupra factis habebitur $D = \frac{1}{229}$. Tantillo errore contra Newtonum pugnatur, adeo exigua eſt Newtonianæ theoriæ, obſervationumque diſſenſio!

Porro ad eum apicem, præciſionemque obſervatorum diligentiam pervenire non poſſe, ut tam parvi errores præcaveantur, ex ipſa obſervationum inſtituendarum methodo palam fit. Atque ut a gradibus Meridiani exordiamur, quum ad ipſos eruendos primo duorum locorum diſtantiæ a ſe invicem, complurium Triangulorum ope, deinde vero latitudinum differentiæ ſumendæ ſint, nemo non videt, aut omnes triangulorum angulos, aut extremorum verticum altitudines Poli, adeo exacte ſumi non poſſe, ut aliquot ſecundorum error utrobique evitetur. Certe quum menſurarum ultra Polarem circulum ſumptarum quinque habeamus, quæ probe inter ſe congruant, diſtantiamque parallellorum Torneæ, & Kittis hexap. 54942. 57 exhibeant (a), ſeptem tamen per novas ſeptem de-

(a) Fig. de la Ter. det. liv. pr. pr p'r. chap. 3., ſec. par. chap. 3.

delineatorum triangulorum combinationes habitæ illam faciunt hexap. 54936, 54925, $54915\frac{1}{2}$, 54912, 54910, $54906\frac{1}{2}$, 54891. Dicam ego posteriorem hanc, dicam alterutram ex quatuor sequentibus veram esse locorum eorumdem distantiam. Quod nam prælationis jus dimensionum similiter sumptarum, aliæ supra alias habent? Ita distantia in primo casu $51\frac{1}{2}$, in quatuor aliis 30 circiter hexap. minor habebitur, & gradus in ea latitudine totidem ferme a definito ex primis triangulorum seriebus hexapedarum numero deficiet. De observationibus cœlestibus quid loquar? In ipsis 4, aut 5 secundorum errorem nulla Astronomorum industria declinari posse, jam olim Cassinus (*a*), & Bouguerius (*b*) adnotarunt, & ex aliquali observationum earumdem differentia evidens fit. Exemplum demus. Arcus cœlestis observatoriis Mama-Tarquensi, & Cochesquensi in Peruvia interjectus ex stella ε brionis 3° 7′ 1″ statuerunt Cl. Bouguer, & de la Condamine: Ex stella θ Antinoi prodiit arcus idem 3° 6′ 59″, & 3° 6′ 58″ ex stella α Aquarii (*c*). Sed ad circulum polarem redeamus. Amplitudo arcus Meridiani (*d*) parallellos inter Torneæ, & Kittis constituti ex stella α Draconis determinata est 57′ 30″. 42, ex stella δ, 57′ 26″. 93, atque inde medio Arithmetico sumpto 57′28″67 posita. Quid si posterior ex his observationibus cuipiam arrideret magis, quid si prior? Tum nullum medii Arithmetici opus esset, & error evaderet fere 2″. Notum est autem 2″ erroris in cœlestibus observationibus 32 hexap. errorem in terrestribus mensuris dare. Quare in unum conjectis, & qui in cœlestes observationes, & qui in terrestres mensuras subrepere possunt, erroribus, 60, aut 70 hexap. error in unius Meridiani gradus determinatione inevitabilis dici debet.

Cæterum si qui adhuc tam scrupulose pro his Meridiani

 gra-

(*a*) Mem. de l'Academ. Roy. 1715. par. 1.
(*b*) Fig. de la Ter. sect. 1. §. 5.
(*c*) Ibidem sect. 5.
(*d*) Fig. de la Ter. det. par les observ. chap. 8. §. 2. part. 2. liv. 1.

graduum determinationibus ſtare velint, ut eas numeris omnibus abſolutas cenſeant, aperteque Newtoniano problemati adverſantes, videant quæſo ſimilia arma pro ejuſdem defenſione Newtono non deeſſe. Rurſus enim duorum graduum longitudines inter ſe comparemus, atque alterum in latitudine 49° 22′, alterum in latitudine 0° ſumamus. In hoc caſu cum ſit $s = 0$, allata formula $D = \frac{E - F}{3E(S_2 - s_2)}$ in hanc aliam $D = \frac{E - F}{3ES^2}$ degenerabit: Unde cum $F$ ſit hexap. 56753, $E$ vero hexap. 571. 83, ſubſtitutionibus ſimili modo factis prodibit $D = \frac{1}{229}$. Aut ergo tanta obſervationibus fides non debet dari, aut obſervationibus tueri itidem, confutarique Newtonum fatendum eſt.

Neque vero tam male de illuſtrium virorum laboribus hiſce de cauſſis ſentirem, ut nihil ipſos pro telluris noſtræ figura, ac magnitudine determinanda eviciſſe Boſcovikio concederem. Concedam utique, eo præciſionis, ac diligentiæ devenire alios non potuiſſe, ut numeris omnibus abſolutas Meridiani terreſtris graduum menſuras exhiberent; dabo etiam ſi placet magis ſuſpectis alios circulorum Æquatori parallellorum gradus operationibus exploraſſe. Nemo eſt, qui vel leviter ipſam graduum hujuſmodi dimetiendorum methodum expendens cum immortali Bouguerio (*a*) non videat, quam lubrica, & ſenſibilioribus etiam erroribus obnoxia ea ſit. Primo enim ubi duæ ſub eodem parallello ſtationes eligantur, dimetiaturque ſtationum earumdem diſtantia, non jam parallelli arcus, utrique interpoſitus metitur, ſed arcus alterius curvæ, quæ, ubi tellus hæc noſtra Sphæræ haberet formam, circulus Sphæræ ipſius eſſet maximus. Hujus porro curvæ arcus parallelli arcu ſemper eſt major, nec niſi ubi ſtationum latitudo ſit nulla, parallellumque cum Æquatore coincidat, ipſi eſt æqualis.

(*a*) Fig. de la Ter. ſect. 1. §. 8.

lis. Præter quam quod Meridianorum per duas ſtationes tranſeuntium differentia determinari non poteſt, niſi Horologium pendulo inſtructum in utraque ad motum Solis accommodando, comparandoque, ope inſtantanei alicujus, aut in cœlo, aut in terreſtri ſuperficie aſſumpti ſigni, diverſas horas, & ſcrupulos, qui diverſis iis in locis eodem tempore habentur. In his omnibus errores aliquot, exiguos utique ſi de Gæodeſia ſit ſermo, ſed non exigui in Univerſa Aſtronomia, Nautica, & Phyſica momenti, non poſſe eludi, animadvertit citato in loco Bouguerius. Horologia quantumvis affabre elaborata ſemiſecundi unius errorem non præcavebunt; obſervatores etiam diligentiſſimi non niſi caſu quodam fortuito convenient in eodem, licet breviſſimæ durationis, ſigno, eodem ipſiſſimo inſtanti temporis inſpiciendo; non ultima inſtrumentorum perfectio, & diverſa in diverſis locis aëris conſtitutio, ac puritas aliorum erit errorum radix. Ubi utrobique 4″ temporis, & ex toto 8″ erratum eſſet, error in parallelli arcu determinando ad 2′ gradus, trigeſimam ſcilicet arcus ipſius partem aſſurgeret. „ Les obſervateurs en un mot, concludit propterea perſpicaciſſimus Bouguer, fuſſent-ils les plus exercés, on auroit des obſervations pour l'Hypothéſe de la Terre allongée pendant qu' il y en auroit d'autres pour celle de la Terre aplatie: On ſeroit maître de choiſir. „ Hiſce de cauſſis Regiæ Pariſienſis Scientiarum Academiæ conſilium ſummopere commendavi ſemper, quæ ne expeditionis ad Peruviam factæ, inanis plane eſſet exitus, litteris ad D. Goudin anno 1737. menſe Martio datis voluit, ut ipſe cum ſociis præclariſſimis ſoli Terreſtris Meridiani graduum determinationi operam daret.

At longe alia res eſt ſi de iiſdem Meridiani terreſtris gradibus ſit ſermo. Simplicior multo, ac facilior, & a locorum longitudinibus independens operatio evadit omnis, atque huc tota reducitur, ut Meridiani arcus duobus parallellis interpoſitus definiatur, ſumaturque latitudinum parallelli utriuſque differentia: Id quod feliciori ſucceſſu tentari, & citra magnos illos, ac vim conſecutionum mutantes prorſus errores abſolvi

poteſt. Primo enim ad cœleſtia quod attinet, quum altitudines poli poſtremis hiſce annis præſertim, exquiſitiſſimis inſtrumentis, maximaque diligentia ſumptæ ſint, & ſaltem ex duabus ſtellis accepto poſtmodum medio Arithmetico, dubitari vix poteſt errorem omnem medii ipſius, atque alterutrius ex obſervationibus differentiam ſuperare. Ita error omnis operationum ultra Polarem circulum inſtitutarum 2″ major eſſe non poterit, nec 2″, aut 3″ major, qui in determinando primo Meridiani gradu commiſſus eſt: Atque hic quidem in tres, & amplius gradus diſtributus vix, aut ne vix quidem gradus illius menſuras alteraſſe cenſeri debet. Menſurarum terreſtrium conſenſio apprime menſuras ipſas commendat. Aliquando contrario tramite dimetito eodem ipſo intervallo 3 pollicum in 6273 hexapedis error fuit: Vide Bouguerium (*a*). Aliquando etiam minor repetitis operationibus diſſenſio inventa eſt: Vide Maupertuiſium (*b*), & Outhierium (*c*). Major, ut ſupra vidimus, hexapedarum $51\frac{1}{2}$ in obſervationibus ad circulum Polarem habitis fuit. Quin etiam poſito indiligentes adeo, infelicesque eaſdem fuiſſe, ut in binis omnium triangulorum angulis 20″, in tertio quovis 40″ erratum ſit, non niſi 54 hexapedarum differentia in integro gradu Maupertuiſio (*d*) ſupputante oriretur. Cum ergo in terreſtribus menſuris tam parum, in cœleſtibus vix magis errari poſſit, non eſt cur de his, aut de illis adeo dubitemus, erroreſque omnes, qui ſubrepere in utriſque potuerunt, ultra 60, aut 70 hexapedas, ut ſuperius dictum eſt, extendamus.

Rationes porro, quibus innixus ingenioſiſſimus P. Boſcovik in celebri ſecunda diſſertatione de Telluris Figura, Romæ edita, obſervationibus minus fidit, non ejus videntur ponderis, ut jugi Philoſopho ſatisfaciant. Quomodo enim quadrantis filum non ita modico pondere onuſtum, eum tremorem con-

(*a*) Hiſt. de l'Acad. 1744.
(*b*) Fig. de la Ter. det. liv. 1. par. 1.
(*c*) Tourn. d'un Voy. au Nord.
(*d*) Fig. de la Ter. det. liv. 1. par. 2. chap. 4.

concipere dici poterit, ut in sensibiles arcus proinde excurrat? Quis ad ignotas nescio quas refractiones animum advertat suum, ubi, & a priori certum propemodum, & tot experimentis consonum omnino est, radiorum ad medium, quodvis perpendicularium refractionem in ipso medio nullam esse, & stellarum non verticalium refractiones tam accurate explorantur, ut nihil magis? Quis quum calculante Newtono (*a*) perpendiculi deviationem factam a monte hemisphærico, alto tria milliaria, & lato sex, non nisi 2', eam vero, quæ gigneretur a sphæra in terrestri superficie constituta, & quæ radium haberet unius marinæ leucæ, non nisi $1\frac{1'}{2}$ esse videat (*b*), deviationem ipsam reguli, & penduli adeo sensibilem dixerit, quando montes, prope quos observationes habitæ sunt, ad duarum leucarum altitudinem supra maris superficiem non assurgunt, ullam vero esse affirmaverit, quando montes hinc inde ad formam Conorum, aut Pyramidum circumpositi, omnia in oppositas partes vix vix compellere, & non nisi æqualiter potuisse evidens est? Adde gradus polarem circulum intersecantis mensuras supra montium Avasaxa, Pullingi, Horrilakero &c. vertices sumptas esse, alias vero alterius gradus, qui æquatorem intersecat, 2000 hexapedis supra libellam maris esse institutas; unde etiamsi sensibilior multo fuisset montium eorumdem actio, cum telluris totius actione conspirans prorsus, irregularitates ullas non peperisset.

Res ergo omnis huc redit, ut, quum a priori Telluris nostræ Figura, ac Magnitudo deducta fuerit, tum vero de theoriæ, & observationum consensu agatur, observationes ipsæ, nec contemnantur prorsus, nec plus æquo æstimentur: Huc ipsæ disquisitiunculas hasce omnes perstringam. Quo exitu, apud te, Lector optime, judicium esto. Certe, si quæ occurrant, quæ minus probes, partim excusanda a te erit scribentis ætas, quæ adhuc vigesimum tertium annum non atti-

git,

(*a*) De Mundi systemate.
(*b*) Princip. Mathem. Comm. prop. 7. lib. 3. nota e.

git, partim curæ aliæ degeneres culpandæ, quæ me ab jocundiſſimis hiſce ſtudiis, nec raro, nec parum diſtrahunt. Ab iis ubi demum plus otii dabitur, licebit ſerius Elementis univerſæ Phyſico-Mathematicæ, quæ jam præ manibus ſunt, proſequendis, abſolvendiſque incumbere. Hæc interim benigne accipias, etiam, atque etiam rogo.



INDEX

# INDEX CAPITUM.



MO-

# MONITUM.

*Capite Dissertationis hujus secundo hypothesis telluris motæ, utpote ad derivandam ex caussa aliqua physica ipsius figuram, & magnitudinem necessaria, assumetur. Id vero, in sensu a Sacra Congregatione, & Romanis Pontificibus permisso, author vellet intelligi, quorum hacce in re latis decretis obsequi se profitetur.*

---

Menda, quæ editori, minus absentis authoris notas quasdam intelligenti, exciderunt, præcipua hæc sunt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| pag. 1. | lin. 11. | gr. 55. | *lege* | gr. 4, min. 55. |
| 2. | 21. | Tacquier | | Jacquier. |
| 3. | 31. | Aeboraci | | Eboraci. |
| 5. | 5. | $78907\frac{1}{2}$ | | 78907. |
| ibid. | 9. | 59531 | | $59530\frac{1}{2}$ |
| | 12. | $58327\frac{1}{2}$ | | 58327. |
| 6. | 12. | per y | | per $\gamma$. |
| ibid. | 26. | & poll. | | & poll. 7. |
| 12. | 29. | ut Lunæ. | | & Lunæ. |
| 22. | 6. | demonstratum jam | | demonstratum est jam. |
| 42. | 5. | $\pm z \mp c$ | | $\pm z \mp \frac{1}{2} c$. |
| 49. | 18 | fumatur | | sumatur. |
| 50. | 17. | nota 5. | | nota s. |

DIS-

# DISQUISITIO MATHEMATICA IN CAUSSAM PHYSICAM FIGURÆ, ET MAGNITUDINIS TELLURIS NOSTRÆ.

## CAPUT PRIMUM.

*De observationibus circa Telluris Figuram hactenus institutis.*

QUoniam neque ex gravium directione, neque ex altitudinibus syderum, neque ex terrestris umbræ, projectæ in Lunam sectione, certum aliquod argumentum proferri potest pro Telluris nostræ Figura, ac Magnitudine accurate determinanda; saniori consilio factum est, ut in eamdem Telluris Magnitudinem, ac Figuram veteres, recentioresque, ex terrestrium graduum mensuris, ac pendulorum motu inquisierint. Primus longitudines pendulorum ad idem tempus vibrantium ubique non esse æquales animadvertit Richerius (*a*) anno 1672. in Cayenna insula latitudinis Borealis gr. 55. Ipse dum transitum fixarum per Meridianum Augusto mense observaret, reperit horologium suum singulis diebus 2' 28″ tardius moveri, quam pro motu medio Solis, & longitudinem penduli, Parisiensi pendulo synchroni, ab ipsius longitudine, quæ Richerio erat 3 pedum Paris., linearum $8\frac{3}{5}$, linea una cum quadrante deficere. Hæc ipse repetitis pluries singulis septimanis per decem integros menses observationibus extra omnem dubitatio-

A nis

(*a*) Hist. de l'Acad. 1672.

nis aleam posuit. Quare longitudo penduli singulis secundis temporis circa æquatorem vibrantis, statuit lin. 439 $\frac{7}{20}$; & $\frac{1}{6}$ lin. cum Newtono (*a*) addendo caloris gratia, a quo pendulum sub æquatore producebatur, evadet longitudo eadem lin. 439 $\frac{61}{120}$, seu 439. 51. Conspirarunt huc postmodum aliæ omnes, quæ majori studio, ac data opera institutæ fuerunt observationes, ut pendula pro majori ab æquatore distantia, longiora exhiberent, & ipsa pendulorum augmenta, pergendo ab æquatore ad polos darent quadratis sinuum rectorum latitudinum quam proxime proportionalia. Longitudo penduli sub æquatore eodem tempore cum Parisiensi pendulo oscillantis Bouguerio (*b*) fuit lin. 439. 21. Ipsi in unum conjiciemus, & Richerii, qui toties observationes suas diligentissime iteravit, & Bouguerii, quem summo studio, & adhibitis correctionibus omnibus operi incubuisse constat, mensuras, & medium Arithmeticum assumentes statuemus longitudinem penduli sub æquatore lin. 439. 36. Ejusdem penduli longitudinem Romæ in latitudine 41° 44′, ut ex Mappis Geographicis colligitur, determinarunt celeberrimi P. P. Le Seur, & Tacquier 440. 28 linearum. Parisiis in lat. 48° 50′ ex novissimis Mairani experimentis prodiit lin. 440. 57: At Grahamo observante pendulum Parisiis 5″. 6 retardans super unam fixarum revolutionem, accelerat 2″. 1 Londini; ergo, cum fixæ horis 23° 56′ 4″, seu 86164″ revolutiones suas absolvant, erunt tempora æqualium numero oscillationum Parisiis 86169″. 6, & 86161. 9 Londini: Et quia vires gravitatis, & pendulorum ad idem tempus vibrantium longitudines sunt inter se reciproce, ut quadrata temporum oscillationum numero æqualium penduli unius, erit longitudo penduli Parisiensis, ad longitudinem Londinensis, ut 7423873011б1 ad 742519996416, sive ut 1000000 ad 1000178. Erit igitur Londini penduli synchroni longitudo lin. 440. 64. Ultra polarem circulum in lat. 66° 48′ pendulum idem a

D.

(*a*) Princip. Mathem. lib. 3. prop. 20.
(*b*) Fig. de la Ter. sect. 7. §. 22.

D. De Maupertuis, & sociis diligentissimis positum fuit lin. 441. 17.

In dimetiendis Meridiani terrestris gradibus vetustiores etiam Mathematici desudarunt. At longe alio, quam recentiores, successu. Minus ipsi apparentes omnes syderum motus noverant, minus in refractionibus supputandis erant solliciti, mensurasque suas omnes in superficie Terræ, ampliorique, quæ offerebatur planitie instituentes, minus ad varias planorum irregularitates, ac singulos deviationum a recto tramite angulos attendebant. Hinc factum est, quod eorumdem graduum dimensiones a dimensionibus recentiorum adeo discrepantes Anaximander, Hipparcus, Possidonius, Erathostenes, Ptolemæus, Strabo, Maimon, & Arabes exhibuerint. Eodem loco Fernellii, Ricciolii, & Snellii dimensiones haberi possunt: Constat enim (*a*) Snellium triangulorum suorum basim, & angulos omnes non ita diligenter sumpsisse; neglexisse refractiones Ricciolium (*b*); omnes ignotas tunc temporis, nec nisi postmodum accuratissimis Cl. Bradley observationibus determinatas fixarum aberrationes ad calculum non revocasse. Alias de Snellianæ mensuræ correctione, ex basi ultimo a Snellio eodem super nudam glaciem sumpta, a celebri Musschenbrockio in opusculo de Magnitudine Terræ exhibita, sentiendum esset, nisi ipse ad habendas Alcmariæ, & Bergæ ad Zomum altitudines poli, Cassini observationibus usus fuisset. At cum in iis observationibus nulla aberrationis lucis, incompertæ adhuc, habita sit ratio, quamvis tamen vere habenda fuerit (*c*), expectandum erit, ut illustrissimi Batavi Mathematici, easdem poli altitudines, cautelis omnibus sumant, quo rectius de concivis meritissimi laboribus judicium ferri possit.

Primus accuratiori calculo Meridiani terrestris gradum exhibuit in Anglia Nervoodus. Ipse anno 1635. metita Æboraci, & Londini distantia, observatis omnibus planorum irregularitatibus, atque angulis deviationis a recto tramite, redu-



(*a*) Musch. de Magn. Terræ.
(*b*) Picard. Mes. de la Ter. Cassini Traité de la Grand., & de la Fig. de la Ter par. 2. chap. 9.
(*c*) Trait. de la Grand. de la Ter. par. 2. chap. 8.

ctisque ad Meridianum mensuris, arcum utrique Urbi interjacentem invenit pedum Londinensium 905751: Cumque duobus diversis annis solstitii æstivi tempore, quando nulla propter lucis aberrationem correctione erat opus, sextante, cujus radius quinque erat pedum, altitudines poli Eboraci, & Londini sumpsisset, illud etiam, quod ante ill. Bradleyum inevitabile videbatur incommodum, casu quodam singulari, & fortuito declinans, differentiam latitudinum habuit 2° 28′, & Meridiani gradum in latitudine 53° circiter, statuit pedum Londinensium 367196, seu 57300 Parisiensium hexapedarum. Nervoodum Picartus in Galliis imitatus, distantiam Malvoisinæ, & Sourdonis per duas triangulorum series determinare aggressus est. Secunda, quam priori, ob majorem observationum in ea factarum certitudinem, consensumque cum basi actu mensurata, anteposuit, distantiam illam hexap. 68347 $\frac{1}{2}$ invenit (*a*). Invenit etiam distantiam Ambiani, & Sourdonis hexap. 10559 $\frac{1}{2}$; unde totalis distantia Malvoisinæ, & Ambiani ipso fuit hexap. 78907. Porro differentiam latitudinum ex genu Cassiopeæ statuit 1° 22′ 55″, & gradum proinde in latit. 49° 22′ obtinuit hexap. 57060. Prior triangulorum series Cassino Patri magis arrisit, atque juxta ipsam, distantiam Malvoisinæ, & Ambiani determinavit hex. 78865 $\frac{1}{6}$: Tum etiam latitudinum differentias ex eodem Cassiopeæ genu, correctione refractionum, quas Picartus neglexerat, adjecta, definivit 1° 22′ 56″ $\frac{2}{5}$; atque ita (*b*) gradum in ea latitudine posuit hex. 57010. At, & Cassinus ipse, & Picartus nullas propter aberrationem lucis correctiones adhibuerunt. Quare operæ pretium duxit postmodum Maupertuisius observationes easdem instrumento accuratissimo, & cautelis omnibus iterare. Juxta ipsum differentia latitudinum loci 1105 hexap. magis Septentrionali, quam

(*a*) Mes. de la Ter. art. 8. p. 15.
(*b*) de la Grand., & de la Fig. de la Ter. par. 2. chap. 7.

quam ædes B. Virginis Lutetiæ, & loci $98\frac{1}{2}$ Ambiani magis Meridionali æde Urbis, est 1° 1′ 12″: Hinc, quum ex posterioribus Picarti mensuris, quæ magis Maupertuisio arrident, distantia Malvoisinæ, & Ambiani sit hex. $78907\frac{1}{2}$ Malvoisinæ, & ædis B. Virginis Lutetiæ $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem hex. 59531; ex quibus detractis hex. $1203\frac{1}{2}$ propter observationum loca, arcui 1° 1′ 12″ respondebunt hex. $58327\frac{1}{2}$, & arcui unius gradus hexap. 57183. Priorem Picarti mensuram cum Cassino retinendo, foret gradus ipse hex. 57141, & medium Arithmeticum sumendo hex. 57162.

Accuratiores multo haberi debent aliæ mensuræ, quas annis sæculi hujus primo, & secundo jussu Lodoici Magni in Galliis habuit Cassinus Pater. Tum ipse distantiam inter parallellos observatorii Parisiensis, & villæ Collioure in Rousillon fecit hex. 360614, differentiam vero latitudinum, observatis anno 1701. mense Martio Collioure, & Parisiis anno 1702. eodem mense (*a*) fixæ ejusdem distantiis a Zenith, 6° 18′ 57″ statuit; unde unum Meridiani gradum definivit hexap. 57097. In quo quidem notabilium errorum metus esse non potest: Quandoquidem, & terrestres mensuras ad libellam maris a Cassino reductas fuisse constat, & in utroque extremo verificatas, magno cum lineis actu mensuratis consensu, & in cœlestibus omnes refractionum, præcessionisque æquinoctiorum correctiones adhibitas fuisse, correctione vero propter lucis aberrationem, ob habitas iisdem anni temporibus tam Lutetiæ, quam in villa Collioure observationes, opus non fuisse. Errores porro exigui illi, qui in similibus observationibus declinari nulla observatorum industria possunt, in sex, & amplius gradus distributi, gradus unius mensuram vix poterant alterare. Quare cum immortalibus Newtonianæ Philosophiæ in-

(*a*) de la Grand., & de la Fig. de la Ter. par. 1. chap. 13.

interpretibus Le Seur, & Tacquier (a) in numeris proximis rotundis gradus in latitudine 45° hex. 57100 assumi poterit satis tuto. Meridianam eamdem postmodum junior, & magno patri non degener Cassinus ad septentrionales usque Galliæ partes, & Dunkerkanum portum anno 1718 protraxit; cumque distantiam parallelorum Lutetiæ, & Dunkerk invenisset hex. 125454, differentiam vero latitudinum observationibus a die 15. Julii ad 10. Augusti anni ipsius Dunkerk, & Parisiis a die 23. Augusti ad 4. usque Septembris, habitis determinasset 2° 12′ 9″ 30‴ (b), gradus unius in ea latitudine mensuram posuit hex. 56960. At ipse ad habendam latitudinum differentiam usus est stella capitis Draconis, quæ per y a Bayero designatur, cujus declinationem ex lucis aberratione iis temporibus incomperta, a mense Julio ad Septembrem augeri Bradley, & Monnierii observationibus constat, & ad eruendam parallellorum distantiam, eam triangulorum omnium basim fecit, quæ a Picarto postmodum rejecta est.

Omnibus circa Figuram terræ hactenus institutis observationibus palmam præripuerunt, quæ ab anno sæculi hujus 35 ad annum usque 42 sub æquatore, & ultra polarem circulum habitæ sunt ab immortalibus viris, & de Astronomia universa, Nautica, & Physica meritissimis De Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, Outhier, Celsius, Bouguer, de la Condamine, Ivan, & Ulloa. Posteriores quinque anno 1736. mense Novembri in Peruvia basim 6272 hex. Parisiensium, ped. 4, & poll., in magna Yaruqueensi planitie accuratissime dimensi sunt, atque ut tanti operis memoria ad feram usque posteritatem traduceretur, idipsum obelisco expressum in eadem planitie reliquerunt. Basi 32 triangula superstruentes, atque angulos adnotantes omnes, & latera ex basi, & angulis deducentes, repetitis etiam contrario tramite mensuris, reductisque ad libellam Carabourou, 1226 hex. supra libellam maris, distantiam (c) observatorii Mama-Tarquensis, & Cochesquensis inve-

(a) In not. ad prop. 19. lib. 3. Princip.
(b) de la Grand., & de la Fig. de la Ter. par. 2. chap. 3.
(c) Fig. de la Ter. sect. 2. 3. 5. Relacion hist. del Viaye a la Amer. Merid. to. 5.

invenerunt hex. 176940. Porro cœlestem arcum utrique observatorio interjacentem accuratissimis instrumentis, atque aliis cautelis omnibus quam scrupulosissime adhibitis determinarunt 3° 7′ 1″, & propterea primum Meridiani terrestris, & æquatorem intersecantem gradum statuerunt hex. 56767. Mirum est quanta industria, & præcisione in tam delicatis operationibus processerint incomparabiles viri: Quod si etiam hoc non obstante error aliquis sublapsus esset, is certe in tres, & amplius gradus partitus, stabilitam hex. 56767 mensuram vix alterasset. At mensura hæc ipsa 1226 hex. supra libellam maris sumpta est; quare hex. 21 $\frac{2}{5}$ demendo ut ad libellam ipsam reduceretur, primum Meridiani terrestris gradum fecit Bouguerius (*a*) hex. 56746; ac demum hex. 7 addendo caloris gratia, a quo adhibitæ in Gæodesiæ operationibus perticæ producebantur, gradum eumdem definivit hex. 56753.

Alii ad polarem circulum missi, anno 1736. descripto in altissimorum Lapponiæ montium verticibus Heptagono, exploratis angulis omnibus, acceptaque in plana lacus glacie obstricti superficie, prope Avasaxa, basi 7406 hex., ped. 5, poll. 2, meridiani arcum inter parallellos Torneæ, & Kittis jacentem determinarunt hex. 55023. 47 (*b*). Tum instrumento a solertissimo Graham affabre elaborato, differentiam latitudinum parallellorum eorumdem, servatis præcessionis æquinoctiorum, & aberrationis lucis correctionibus, habuerunt 57′ 28″ 67, & ipsam Torneæ latitudinem 65° 50′ 51″, 8[1] majorem, quam antea Bilbergus ex observationibus suis concluserat. Inde gradum in lat. 66° 20′ eruerunt hex. 57437. 9. Correctionem ob lucis refractionem supervacaneam existimarunt. Stella enim, quam Kittis selegerant vix $\frac{1}{2}$° a Zenith distabat, & $\frac{1}{4}$° distabat, quam selegerant (*c*) Torneæ. Eam tamen negligendam non fuisse

(*a*) Hist. de l'Acad. 1744. Fig. de la Ter. sect. 3. ss. 62., sect. 5. § 62.
(*b*) Hist, & Mem. de l'Acad 1737. Fig. de la Ter. det. par les observ. liv. 1; Journal d'un Voyage au Nord.
(*c*) Fig. de la Ter. det. liv. 1. pr. par. chap. 5.

fuisse animadvertit optime Bouguer (*a*); quandoquidem cœlestem arcum 1″ ampliorem reddebat, & meridiani gradum propterea 16 hex. breviorem. Verius itaque erit hic gradus hex. 57422. Quod si verbum adhuc ad ultimam observationum illarum correctionem addere licet, eæ ad libellam maris reducendæ erant. Constat enim Torneæ, & Kittis distantiam supra altissimos Lapponiæ montes Avasaxa, Pullingi, Kakama, Cuitaperi &c. sumptam fuisse, unde nova reductione erat opus, antequam ex ipsa Meridiani terrestris gradus definiretur. Ita a præclarissimis Regiæ Academiæ membris ad Aequatorem missis diximus factum. Quare ubi ponamus observationes illas in similibus altitudinibus (neque enim, aut a Maupertuisio, aut ab Outhierio ipsæ exhibentur) peractas fuisse, ac aliæ circa æquatorem peractæ sint, in lat. 66° 20′ gradus hex. 57400 non erit major.

Has ipsi observationes, utpote incredibili studio habitas, & data opera pro Figuræ terrestris determinatione, ultro admittimus; ita quidem, ut, cum minimos aliquos errores, puta 60, aut 70 hex. in tam longis, operosisque dimensionibus evitari nulla industria posse probatum sit, errores vero multo majores suspicari in ipsis non licere omnino, assumamus Meridiani terrestris gradus in lat. 0, 45°, 49° 22′, 53°, 66° 20′, ab hex. 56753, 57100, 57183, 57300, 57400, non nisi 60, aut 70 hex. posse abludere. Nonnulli circulorum æquatori parallellorum gradus annis 1733, 1734, 1735 exhibiti in Galliis sunt. Anno 1733 Astronomi incomparabiles, Cassini ambo, Maraldus, atque Abbas de la Grive differentiam Meridianorum Lutetiæ, & Maclovii invenerunt minutorum horariorum 18, & secundorum 10, quibus ad gradus reductis, parallelli arcum iis Meridianis interjacentem determinarunt 4° 32′ 30″(*b*); 2′ 30″ scilicet majorem, quam antea Picartus determinaverat. Distantiam porro Meridianorum in ea latitudine invenerunt hex. Paris. 165015; ex qua parallelli gradus eruitur hex. 36333. Similia sequenti anno ad Orientem digressi observarunt, continua-

(*a*) Fig. de la Ter. sect. 6. §. 21.
(*b*) Mem. de l'Acad. Roy. 1733. par. 2.

tinuatisque ad Strasburgum usque 29 triangulis (*a*), distantiam Meridianorum Parisiensis, & Strasburgensis invenerunt hex. 205100, interceptum parallelli arcum 5° 32′ 45″, altitudinem poli Strasburgi 48° 35′, unde parallelli illius gradum statuerunt hex. 57066. Anno 1735 in Aurelia efformatis, continuatisque usque ad insulam d'Ovessant 57 triangulis Cl. De Thury parallelli gradum in lat. 47° 13′ 8″ fecit hex. 37973. At ipsa observationum dissensio, quibus duo primi parallellorum, eamdem ferme habentium latitudinem, gradus 733 hex. a se invicem discrepantes exhibentur, confirmat, quod adnotatum supra est, nimis lubricam esse longitudinum differentias observandi methodum, quam ut quidquam exinde certi circa ipsos parallellorum gradus erui possit. Circuli æquatoris parallelli gradum in lat. 43° 32′, hex. 41618, independenter, ut Bouguerius (*b*) testatur, a Meridianæ lineæ operationibus, determinarunt Astronomi oculatissimi, Abbas de la Caille, & D. De Thury.





(*a*) Mem. de l'Acad. Roy. 1734.
(*b*) Fig. de la Ter. sect. 6. 11. 31.

## CAPUT SECUNDUM:

### *De principiis, & hypothesibus quibusdam.*

HÆc sunt, quibus postmodum de ea, quam Hydrostaticis legibus superstruemus, Figuræ terrestris theoria, judicium licebit ferre. Ipsi modo tribus principiis adytum sternimus. Primum est, quod post magnum Newtonum revocari in dubium vix potest, gravitatem ad universas, & singulas materiæ particulas fieri, & quantitati materiæ directe proportionalem esse, ac quadratis distantiarum reciproce. Primo enim constat terrestria corpora, quæcumque sint, in quibus experimenta institui possunt, in vacuo saltem Boyliano deorsum ruere; constat Lunam circa Terram, planetas primarios, & Cometas circa Solem, satellites circa primarios, areas describere temporibus constanti lege proportionales, hoc est, per 2. lib. 1. Princ. Mathem. Newtoni prop., Lunam in Terram, planetas primarios, & Cometas in Solem, ac satellites in primarios planetas vi aliqua urgeri: Constat ergo omnia, sive terrestria ea sint, sive cœlestia corpora, quæ sub experimenta, & observationes veniant, gravia esse; & quia juxta optimam philosophandi regulam, proprietates, quæ conveniunt corporibus iis omnibus, in quibus experimenta, & observationes institui possunt, quæque intendi nequeunt, & remitti, cæteris etiam quibuscumque debent adjudicari, simili modo gravia fatenda erunt alia omnia universi hujus corpora. Jam vero gravitatis terrestrium corporum quantitatem acceleratricem in majoribus supra terrestrem superficiem altitudinibus minorem esse observationibus Cl. Regiæ Parisiensis Academiæ sodalium proditum est: Ipsi enim in Urbe Quito 1466 hex. supra libellam maris longitudinem penduli synchroni habuerunt poll. 36, lin. 6. 88 (a), quando in maris libella fuit eadem longitudo 36 poll., lin. 7. 21. Simili modo in vertice montis Pichin-

(a) Fig. de la Ter. sect. 7. § 22.

chincha lin. o. 36 corripiendum ab ipsis (*a*) fuit pendulum, ut minuta secunda exhiberet. Hic, quod jam olim ex lentissimo Apsidum motu deduxit (*b*) Cl. Newton, & a priori attigisse sibi visi sunt Joannes Bernoullius (*c*), & David Gregorius (*d*), gravitatem scilicet in diversis distantiis non aliam proportionem sequi posse, quam reciprocam duplicatam distantiarum earumdem, ita ostendemus. Gravitatis quantitas acceleratrix in Luna, & terrestribus corporibus per prop. 3. lib. 3. Princ. Newtoni, in planetis primariis, in Satellitibus Saturni, & Jovis, per pr. 1., & 2. ejusdem libri hanc proportionem obtinet: Itaque omnia, in quibus experimenta, & observationes institui possunt, corpora; & propterea alia etiam quæcumque in diversis ab eodem centro distantiis constituta, gravitates acceleratrices habent quadratis distantiarum a centro reciproce proportionales. Ex quo jam sequitur ipsam diversorum corporum gravitatem totalem, motricemque in paribus a centro distantiis quantitatis materiæ rationem sequi. Nam si in iisdem a centro distantiis æqualis est gravitas acceleratrix, gravitas motrix eo erit major, quo plures erunt numero particulæ, quæ eadem celeritate ad centrum tendant, hoc est quantitati materiæ proportionalis. Vide de his Newtonum prop. 6. lib. 3. Porro mutuam esse etiam hanc gravitatem, & quantitati materiæ directe, ac quadratis distantiarum reciproce proportionalem, exinde licet colligere, quod corpora ea omnia, quorum mutua gravitas experimentis, atque observationibus explorari potest, mutuo in se gravia deprehenduntur. Nam si, & omnes corporum partes in se mutuo, & juxta legem jam designatam gravitant, universalis hujus, & mutuæ gravitatis indicia in maximorum montium viciniis se prodent; quemadmodum ad pedes montis Chimboraço in Peruvia, 3217 hex. supra libellam maris perpendiculariter assurgentis, Bouguerio (*e*) prodierunt, retracto pendulo $7\frac{1''}{2}$ a perpendiculo: Id autem univer-

 salem

(*a*) Hist. de l'Acad. 1744. (*b*) Princ. Math. lib. 3. prop. 2.
(*c*) Com. Phil., & Mathem. to. 1.
(*d*) Astr. Phys., & Geom. to. 1. pr. 48.
(*e*) Fig. de la Ter. sect. 7. §. 74.

falem hanc, & mutuam gravitatem, ait optime (a) Mac-Laurinus, mirum in modum confirmat. Primariorum etiam circa Solem, & fatellitum circa primarios, motus turbabitur a planetis majoribus, & propioribus; motus fcilicet Lunæ circa Terram a Sole, motus Jovis circa Solem a Saturno, & a Jove Saturni motus. Alia cœleftia corpora, aut remotiora, aut minora irregularitates alias non gignent; quum a Newtono jam in prop. 12., & 26. lib. 3. calculo erutum fit, gravitates Lunæ in Solem, & Terram effe inter fe, ut 1 : 178, gravitates Saturni in Jovem, & Solem, ut 1 : 211, gravitates Jovis in Saturnum, & Solem, ut 1 : 2409; aliorum vero omnium actiones in fe mutuo longe minores effe, quam ut fenfibilem effectum aliquem poffint producere. Jam vero motus Saturni, & Jovis circa Solem, modo acceleratur, modo retardatur per vices, excentricitas nunc diminuitur, nunc augetur, aphelium nunc promovetur, nunc retrahitur, & ita quidem fenfibiliter in Saturno maxime, ut ad hafce perturbationes hæreant Aftronomi: Omnes tamen adeo accurate cum hac ipfa gravitatis theoria congruere, ut error maximus vix fuperet duo minuta prima annuatim, adnotarunt in Comment. ad 3. Princ. lib. §. 71, nota d. Newtonianæ Philofophiæ interpretes celeberrimi. Similiter, quum fere innumeræ in Luna variationes obferventur, velocitatis, diftantiæ a Terra, motus horarii, inclinationis orbitæ, Apogæi, nodorum, excentricitatis &c.; omnes ex unica Solis actione fubtiliffimus Newton in probl. 25. lib. 3., & fequentibus decem, exquifitiffima finthefi, & felici adeo fucceffu derivavit, ut motuum Lunarium tabulæ, ac Ephemerides, quæ Newtonianæ theoriæ fuperftruuntur cum obfervationibus apprime confentiant, ut Lunæ locus in cœlo, ut optime animadvertit (b) Gregorius, adeo exacte poffit definiri, ut loci ex theoria eruti, & loci veri diffenfio numquam binis fcrupulis primis fit major, & plerumque adeo exigua, ut ipfarum obfervationum incertitudini jure merito tribuenda fit. Quæ quidem veritatis ejus theoriæ fortiffima probatio eft, quum

(a) Expof. des decov. de Newton liv. 3. chap. 4.
(b) Schol. prop. 24. fect. 6. lib. 4. Aftr.

quum ea, quæ Mathematice deducuntur ex eadem theoria apprime consentiant phænomenis, & in casu maxime composito. Ita in scholio prop. 35. lib. 3. Princ. concludunt P. P. Le Seur, & Tacquier. Ipsi ut determinatum aliquod perturbationum genus in medium proferamus ad Saturnum, & Jovem redibimus. Constat in ipsorum oppositionibus, ac conjunctionibus, accelerari Jovem, & Saturnum retardari, prorsus ut retardari hunc, & illum accelerari, ex mutua utriusque gravitate per Coroll. 2., & 3. prop. 66. lib. 1. Princ. Mathem. sequitur. Cassinum filium adeamus in Memoriis Regiæ Parisiensis Scientiarum Academiæ ad annum 1743. Mense Februarii ejusdem anni Jupiter, & Saturnus in signo Virginis conjuncti sunt: Jupiter die 28. illius mensis 5′, & 45″ matutini temporis visus est ad 9° 17′ 33″ Virginis. Ex tabulis esse debuerat ad 9° 15′ 0″. Ergo tunc temporis ex Saturni actione 2′ 33″ acceleratus est Jupiter. Notabilior prodiit Saturni retardatio, quemadmodum prodire debuit, quum actio Jovis in Saturnum multo sit major, ut dictum est, actione Saturni in Jovem. Saturnus die 21. Februarii 44′ post quintam matutinam horam conspectus est ad 2° 15′ 50″ Virginis. Ex tabulis Astronomicis exhibetur tunc temporis Saturni locus ad 2° 28′ 28″ Virginis. Ergo Saturnus 12′ 38″ retardatus est. Differentia loci visi, & ex tabulis eruti, satis magna visa est ipsi etiam Cassino. Alias circa conjunctionem anni 1702, oppositionem anni 1713. &c. in Saturno observatas retardationes apud eumdem vide in Actis Academiæ ejusdem ad annum 1728. Ipsi susius hæc omnia persequemur in nostris Physico-Mathematicæ elementis. In præsentiarum, quæ allata sunt hactenus, sufficiant, ut concludamus ea corpora, quorum mutua gravitas explorari observationibus potest, mutuo in se gravia deprehendi vi, quæ quantitate materiæ directe, & quadratis distantiarum reciproce commensuratur, ac propterea eadem lege mutuo in se gravitare alia etiam omnia Universi hujus corpora.

Alterum eorum, quæ assumimus est, tellurem nostram, & diurno circa se ipsam, & annuo circa Solem, & Tonico, ut

ut ajunt, motu cieri. Motus hic Tonicus ex ſtabilitis jam gravitatis legibus videtur ſequi. Nam ſi planetæ ad Solem urgentur vi decreſcente in duplicata ratione diſtantiarum a Sole, ſecluſis exiguis aliquot irregularitatibus, ex Cometarum, Planetarumque actionibus in ſe invicem, oriundis, quieſcent planetarum aphelia, & orbium, in quibus moventur plana, & nodi per prop. 1., & 11. lib. 1. Princip. Mathem.; propterea quieſcent etiam ſtellæ fixæ, quæ datas ad aphelia, nodoſque, poſitiones conſtanter retinent. Ita Tonicum motum fixis negatum, telluri adjudicavit Newtonus in prop. 14. lib. 3. Ad motum annuum, & diurnum quod pertinet, fateri ingenue debet, pleraſque ex iis rationibus, quæ hactenus ad ipſos ſuadendos allatæ ſunt, longius a ſolidi argumenti pondere, ac vi abſuiſſe. Quod enim primo Lansbergius de imperceptibili fixarum in Thyconis ſyſtemate pernicitate propoſuit, quæque addidere poſtmodum Galilæus, & Keillius de ſimplicitate, armonia motuum, analogia cum aliis planetis, quæ in Keplero-Copernicano ſyſtemate eſſet maxima, ſuadent utique, ſed non extorquent omnino aſſenſum ab intellectu. Pendent a phyſicis, & precariis hypotheſibus circa telluris denſitatem, & alia hujuſmodi, quæ ex pendulorum motu deduxit in ſua Theorica Aſtronomia Chriſtianus Volfius. Majoris momenti eſſet, quod ex fixarum parallaxi a Volfio eodem, Herobovio, aliiſque deſumitur, ubi certo de parallaxi ipſa conſtaret. At quamvis plura hacce in re Herobovius a ſe per integrum quadriennium in ſuburbano Hafniæ obſervata ediderit in ſuo Copernico triumphante, & plura per continuos ſeptem annos in polari ſtella adnotata Doct. Walliſio celeberrimus Flamſteedius aperuerit litteris die 20. Decembris anni 1698. datis, alia etiam adjecerint Hookius, Caſſinus &c.; adhuc tamen non liquet hanc fixarum parallaxim, aut ullam eſſe, aut augeri aliquando, & imminui, ac conformiter ad hypotheſim terræ motæ, & imminui, & augeri. Primo enim in ipſis Herobovii obſervationibus contradictio eſt. Differentia appulſus Sirii, & Lyræ ad Meridianum die 4. Aprilis anni 1711. prodiit $11^h\ 55'$, die 5. Octobris ejuſdem anni $11^h\ 54'\ 54''\ 53'''$; & anno 1705. diffe-

differentia appulsus Capellæ, & Lyræ die 14. Martii fuit $13^h$ $31'$ $59''$, ac $13^h$ $31'$ $58''$ die 21. Septembris. Itaque differentia appulsuum ad Meridianum Hafniæ in primo casu ab Aprili ad Octobrem quasi $1'$ imminuta esset, & non nisi $1''$ in casu altero. Accedit cum aliis accuratissimis immortalis Manfredii observationibus Herobovianas pugnare. Ipse differentiam appulsus Sirii, & Lyræ anno 1728. exeunte Martio invenit $11^h 52' 17''$, & $11^h 52' 20''$ Septembri exeunte. Demum in hypothesi etiam telluris motæ nullas has parallaxes esse debere, ex quo distantia Solis a Terra respectu distantiæ stellæ fixæ etiam proximæ a Terra evanescat, deduxit jam in prop. 66. lib. 3. Gregorius. Ipsi itaque hic aliunde, & ex stabilita gravitatis universalitate id ipsum evincemus. Certe si omnia corpora in se mutuo gravia sunt, si non minus Sol in Terram, quam Terra in Solem gravitat, & gravitas Solis in Terram est ad gravitatem Terræ in Solem, ut quantitas materiæ in Terra ad quantitatem materiæ in Sole, sive ut 1 ad 169282 (*a*); dum Sol insensibili vi in Terram urgetur, tanta vi urgeretur in Solem Terra, ut nisi ipsam firmissimis catenis, ac funibus in loco suo retineri, aut circa Solem revolvi admitteremus, in Solem labi prorsus deberet. Habet ergo periodicum, & annuum motum circa Solem, ex quo ea vis centrifuga profluit, quæ gravitati obsistendo impedit quominus in Solem ruat. Quod si vero & Tonicum, & annuum motum habet Tellus, etiam diurnum habere necessum est. Nostra hic non interest in iis cavillis omnibus, ac gerris, quæ contra hypothesim hanc allatæ hactenus sunt, recensendis, exsolvendisque immorari. Cæterum verbo præoccupari omnes possent. Nam quia telluris distantia a Sole, ut dictum est, relate ad fixarum distantiam evanescit, eadem erunt prorsus fixarum phænomena, sive Sol, sive Terra in Mundi centro immobilis consistat: Et quia idem motus in nostra hypothesi, & Terræ, & circumterrestribus omnibus corporibus, & aëri communis est, &, ex primis Mœchanicæ legibus, communis motus nihil officit corporum motibus inter se,

(*a*) Princip. Mathem. lib. 3. prop. 8. Coroll. 2.

se, seu Newtoniana phrasi (*a*), corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur uniformiter in directum, eadem etiam erunt phænomena motuum terrestrium corporum inter se, sive tellus quiescat, sive ipsa simul cum corporibus ipsis omnibus circa axem suum, & circa Solem torqueatur. Excipe in phænomenis primi generis Bradleyanam fixarum aberrationem, quæ cum telluris motui apprime congruat, ipsius non ultima probatio est: In terrestribus autem corporibus ea, quæ citissime ex uno in aliud parallellum transire acciderit, quæque ad loca deveniendo, diversa, ac ipsa moventur, celeritate prædita, aut ad Occidentem, aut ad Orientem deflectent, prout majori, aut minori celeritate ex Occidente in Orientem delatum parallellum ipsum invenient; atque hæc eadem, monente Laurino (*b*), caussa est, quod montes glaciales, qui ex Oceano Boreali digrediuntur, in Occidentali Oceani Atlantici plaga conspiciantur frequentius, quam in Orientali.

Hæc duo, quæ jam ad derivandam ex Hydrostaticis principiis Figuram Terræ perspicacissimus Newton supposuit, ultro admitto: Tertium, quod ipse post Magnum Huygens statuit, Terram, atque alios planetas omnes fluidos aliquando, & in prima creatione extitisse, durius mihi semper, ac minus rationi consonum visum est. Siquidem, quæ in Commentariis Bononiensibus to. 1. de variis terrarum stratis, Scheuchzerus, & Voduardus attulerunt; nullum esse durorum corporum genus, quod aliquando fluidum non fuerit; ita omnia coalescere, quæ fuerunt olim talia, ossa, venas, arterias, vasa quæque, & musculos ipsos, arborum truncos, folia, frutices, lapides, qui intra animalium corpora gignuntur, cancrorum oculos, margaritas, &c., probabilium conjecturarum vim non excedunt: Et ubi reponas ipse hæc fieri debere omnino in substantialibus, quas vocant, corporum mutationibus, ut molleculæ, ex quibus componuntur, alias, atque alias disponantur, modificentur, ac specificam induant diversitatem, creationem a simplici

(*a*) Princ. Mathem lib. 1. leg. 3. Cor. 5.
(*b*) De flu., & refl. Maris prop 7.

plici mutatione toto cœlo diversam esse; ne probabilitatem quidem primitivæ illius fluiditatis hypothesi conciliabunt. At vero alia sunt majoris ponderis argumenta, quæ ipsam evertunt prorsus: Fac enim omnes cœlestium corporum particulas graves, solutasque inter se primitus, ac circulari motu circa axem aliquem latas, caussis naturalibus commissas fuisse; de trium saltem Figuris, Terræ scilicet, Jovis, ac Solis a priori judicium liceret ferre: In Saturno enim, gravitas ex satellitum motibus determinata est, sed motus diurni periodus, ut optime animadvertit (a) D. De Maupertuis, ignoratur; in Marte diurnus motus explorari potuit, non gravitas; in Mercurio demum, & Venere gravitas pariter incomperta est, & motus diurnus, in hac adhuc sub judice, in illo prorsus ignotus; ut Satellites ipsos sileam, in quorum superficiebus, non tantum gravitas ignota est, sed motus etiam vertiginis lentissimus, nihil ad Figuræ negotium, aut admodum parum facessit, ut ideo rem aliunde deducere conati sint, qui exinde (b) planetarum aliorum omnium figuras deducendas esse existimarunt. Videamus itaque quænam esse deberent in ea hypothesi trium dictorum planetarum figuræ, Terræ scilicet, Jovis, & Solis. Vires centrifugæ in Terra, & Sole per Coroll. 2. prop. 4. lib. 1. Princip. Mathem. Newtoni sunt inter se, ut radii directe, & quadrata temporum periodicorum inverse; gravitates vero directe ut radii, & densitates, semel ac in omni sui parte homogeneus sit Sol: Ita erit vis centrifuga sub æquatore Solis ad gravitatem in ratione composita ex directis simplicibus vis centrifugæ sub æquatore Terræ ad gravitatem, densitatisque Terræ, ac Solis, nec non ex duplicata temporum periodicorum; unde cum Sol diebus ferme 27 circa axem suum revolvatur, & densitatem densitatis Terræ sub quadruplam habeat per Coroll. 3. prop. 8. lib. 3. Princ. eorumdem, & gravitas sub æquatore Terræ sit ad vim centrifugam proxime ut 229 : 1, erit vis centrifuga sub æquatore Solis ad gravitatem, ut 1 : 41736,

C &

(a) Disc. sur les Fig. des Astr. pr. 1.
(b) Newt. Princ. Mathem. lib. 3. prop. 38.; Mac-Laurin de flu., & refl. Maris Schol. 2. prop, 5.

& apparens differentia axium Solis 3''' circiter, ubi Sol homogeneus ponatur. Id vero in hypothesi primitivæ fluiditatis impossibile esset: Partium enim superiorum pressione inferiores in minus spatium debuissent adigi. Quod si vero circa centrum Sol esset densior, quam versus extimam superficiem, axium differentia multo major evaderet, & quæ certe oculatissimos Astronomos hactenus fugere non potuisset. Argumentum ad hominem in Jove est: Forent enim ipsius axes inter se fere ut $9\frac{1}{3}$: $10\frac{1}{3}$, ubi homogeneus statueretur, quando tamen Jacobo Pound anno 1719 mensibus Januarii, Martii, & Aprilis exquisitissimis instrumentis in Anglia observanti, diametri Jovis (tum quidem prope nodos existentis) prodierunt in ratione quidem non majori, quam $13\frac{1}{2}$: $14\frac{1}{2}$, sed nec minori, quam 11 : 12. Cassino fuerunt ut 15 : 16. Observationibus magis calculi dissentirent, ubi Jupiter poneretur ad centrum densior, quemadmodum densior ad centrum ea in hypothesi omnino esset. In tellure etiam nostra aliqua occurrere, quæ primitivæ ipsius fluiditati adversantur, duobus ab hinc annis innuebam præclarissimo viro, & in hujusmodi studiis versatissimo D. Joanni Petro Besozzi, meo tunc temporis in Theologicis disciplinis magistro. Fac enim simili modo particulas ipsius omnes fluidas primitus, ac graves, circulari motu abreptas fuisse. Annon, si quæ fuissent densiores, propius quidem accessissent ad centrum, omnino autem in eodem strato non aliæ se composuissent, quam quæ, & ejusdem essent densitatis, & perfecte ad invicem homogeneæ? Qui ergo fieri potuit, ut molleculæ in eodem strato existentes, similes se se inter cum forent, & naturalibus extrinsecis caussis æque expositæ, aliæ tamen fluidæ remanserint; aliæ in solidos lapides, & durissimos adamantes abierint, hæ argillam mollem constituerint, illæ compactissimos silices, omnes tam diversos fluiditatis gradus obtinuerint, quot in iisdem telluris stratis videmus? Certe quæcumque in terrestri superficie mutationes, ex universali diluvio, ex terræ motibus, aut aliis caussis quibus-
libet,

libet, ortæ admittantur, imperceptibile est prorsus, quod Terram ipsæ susdeque ita verterint, ut nullum primitivæ stratorum eorumdem similaritatis vestigium nobis reliquerint. Accedit Terram per puras naturales caussas tam cito ex fluida in solidam debuisse verti, ut quinta post creationem die tuto ipsam pede animantia, & quadrupedes juxta Scripturam, Geneseos primo, calcarint, tertia vero herbæ, & arbores, & arborum fructus germinarint, ac prima demum, aquarum moles a reliquis corporibus distincta esset. Id autem impossibile est pariter, saltem ubi dierum nomine naturales dies, ut plerique ex Theologis sentiunt, intelligamus, nec confugiamus ad Deum supernaturaliter agentem, quando, si tellurem solidam primo, ut nunc est, condidisset, nullum supernaturali virtute sua, & miraculo erat opus. En quot, quantisque difficultatibus obnoxia est ea planetarum omnium, ac Terræ primitus fluidæ hypothesis!

Nihilominus tamen, ubi oculos quis supra terrestrem hanc molem cum Cl. Clairaut (*a*) circumvolvens animadvertat, maria undique communicare inter se, supra marium libellam quam minime littora assurgere, montium altitudinem relate ad totam telluris semidiametrum insensibilem, ac nullam esse, sibi in animum ducet statim telluris nostræ Figuram omnino ab Hydrostaticæ legibus pendere. „ D'ailleurs, si les eaux de „ l'Océan ne sont pour ainsi-dire, que superficielles, ait opti„ me (*b*) Bouguerius, si elles n'ont que trés-peu de profon„ deur, cela ne doit rien faire contre l'aplication des loix de „ l'Hydrostatique; par la même raison que le fond irrégulier „ d'un vase n'empêche pas que l'eau qu' il contient n'ait sa „ surface de niveau. Il suit de-là que l'équilibre doit être „ exactement le même a l'egard de la Mer, que si on pou„ voit la concevoir partagée en colomnes verticales qui abou„ tissent au centre de la Terre. „ Et sane, constat ad littorum suorum libellam, ac formam Terræ, & maria, & lacus, & stagnantes liquores omnes componi: Constat etiam, ut in



(*a*) Theor. de la Fig. de la Ter. introd.
(*b*) Fig. de la Ter. sect. 7. § 32.

Comment. Bonon. to. 2. par. 1. de forma Terræ animadvertit vir acutiſſimus, & magnis ſuis in univerſam litterariam Rempublicam meritis celeberrimus, Franciſcus Zanotti, conſtat inquam, & ſtagnantes liquores, & lacus, & maria, utpote quæ viribus quibuſcumque illatis cedunt, atque obtemperant, quouſque ad æquilibrium perveniant, ad eam formam componi, quam, ubi fluida tota eſſet, haberet tellus; itaque fuerit ne ipſa aliquando fluida, aut non, eamdem omnino habet formam, quam haberet ſi eſſet. Hoc ipſi primitivæ illius fluiditatis principio principium ſubſtituemus. At quænam ſtatui poterit interior telluris conſtitutio, ac denſitas ad centrum maxime, ubi quænam ſint corpora, ſpiſſa, ut notat (*a*) Eiſenſchmidius, inſcientia nos tenet? Aſſumemus ipſi in ſequentibus intimum ſaltem telluris nucleum ex materia homogenea conſtare, & partes illas aliis partibus rariores, aut compactiores, quas in extima ſuperficie conſpicimus, relate ad totam telluris maſſam admodum parvam habere, & non niſi inſenſibilem rationem: Tum concludemus hanc veram ipſius conſtitutionem eſſe, ſi figura, quæ in facta hypotheſi adſcribi deberet Terræ, facto apprime, ac obſervationibus conſona deprehendatur.



CA-

(*a*) Diatribe de Tell. Fig. Elliptico-Sphærica;

## CAPUT TERTIUM.

### *De rotatione corporum, & vi centrifuga.*

EN ergo quonam disquisitiones nostras omnes traduximus. Determinari debet Figura, quam fluidum aliquod præseferret, cujus molleculæ omnes homogeneæ essent ad invicem, iisdemque abriperentur viribus, quibus singulas Terræ molleculas abripi compertum est. Patet autem, quod ubi fluidi hujus particulæ in se mutuo omnes, & in æqualibus distantiis æqualiter gravitarent, neque aliæ eidem gravitati vires obsisterent, in Sphæricam figuram omnes statim conformarentur. Æquilibrium alia ratione tueri, & conservari non posset, quam si æquales circa idem Sphæræ fluidæ $ABCD$, fig. 1. tab. 1., punctum $O$ columnæ $OF$, $OA$ essent dispositæ. Eadem itaque in eadem hypothesi foret nostræ hujus Telluris forma.

At vero figuram hanc immutari necesse erit ubi ponamus particulas easdem circulari motu, & æquali tempore Periodico, hoc est æquali celeritate angulari circa axem $CA$ revolvi. In hoc casu particulæ cujuslibet $F$ pondus imminuetur, turbabitur columnarum omnium æquilibrium, atque ad ipsum recuperandum alicubi deprimetur fluidum, alicubi supra centrum altius assurget. Primo enim particulæ ipsius $F$ vis centrifuga gravitati aliquo modo obnitetur, & ponderis portionem adimet. Portio eadem facile ad calculum revocabitur. Ponatur $OB=r$, $ON=x$, $NF=y$, & quantitas absoluta vis centrifugæ sub æquatore Sphæræ hujus nostræ vocetur $c$. Quoniam motus angularis particularum omnium, & tempora periodica circa axem $CA$ ex hypothesi æqualia sunt, erunt per Coroll. 3. prop. 4. lib. 1. Princ. Mathem. Newtoni vires centrifugæ ut radii; unde erit vis centrifuga totalis in $F=\frac{cy}{r}$. Porro si ipsa totalis vis, quæ agit secundum $FQ$ in duas alias resolvatur, quarum una directionem $FP$ habeat ad directionem gravitatis

*FO*, quæ ad centrum eſt, normalem, altera ſecuudum *FG* agat; hæc ſola gravitati contranitetur, & erit ponderis decrementum ad vim centrifugam totalem ut $FG : FQ$, ſive ut $FN : FO$: Neque enim hic, & in ſequentibus nobis vitio daturum credimus Lectorem optimum, & in hiſce ſtudiis eruditum, ſi, quod demonſtratum jam a ſummis Geometris Newtono, Bernoullio, Varignonio, & nuper etiam ab incomparabili viro, & de univerſa Mœchanico-Phyſica meritiſſimo Vincentio Riccati ex cauſſa phyſica ingenioſiſſime derivatum, compoſitionis, & reſolutionis virium principium libere uſurpemus. Erit ergo ponderis decrementum in loco quocumque $F = \frac{cy^2}{r^2}$.

Hæc prima, & Mœchanicis omnibus notiſſima decrementi ponderis in unaquaque particula eſt cauſſa, particulæ ejuſdem ſcilicet vis centrifuga. At altera etiam eſt, quam nemo hactenus animadvertit, quæque oritur ex centrifugis viribus lateralium particularum. Ex *F* in aliam quamlibet *OP*, figur. 2. tab. 1., demittatur perpendicularis *FD*, & particulæ *D* vis centrifuga *DS* in duas ſimiliter reſolvatur *DH*, *DV*: Una *DH* contra gravitatem ipſius particulæ *D* agente, altera *DV* ſecundum juxta normalem ad directionem gravitatis *DO* impendetur; hoc eſt particulas per *DF* poſitas premet, & in eas vim ſuam transferet, ex *D* nimirum in *V*, & ſucceſſive uſque ad *F*. In *F* aget ſecundum *FT*, & erit vis hæc tota in *F* ad vim contra gravitatem particulæ *F* exercitam, ut $TF : FM = OF : FD$.

Ex quo primo evidens fit eam vis centrifugæ particulæ *D* portionem, totam ad *F* non tranſmitti: Accedente ſiquidem ex *D* in *R*, fig. 3. tab. 1., & exinde uſque ad *F*, magis ſemper, & magis ad directiones gravitatis *OR*, & *OF* fit obliqua, & ex hac ipſa obliquitate imminuitur; eſt enim gravitas totalis particulæ cujuslibet *R* ad eam ſui partem, quæ contra ſupradictam vim agit ut $OR : RD$. Conſtat etiam preſſionem ullam ad *F* uſque communicari non poſſe, niſi a particulis *D* modico intervallo inde diſſitis, ubi gravitate particularum om-

nium

nium vis centrifuga multo fit minor, quemadmodum in casu nostro est. Siquidem vis centrifuga totalis in $D$ est ad eam sui portionem, quæ secundum $DF$ impenditur, ut $OD : OL$; gravitas vero totalis in $R$ ad eam sui portionem, quæ eidem vi juxta $RD$ opponitur, ut $OR : RD$; unde minima $OR : RD$ ratione opus erit, ut hæc illi æquivaleat, & multo minori, ut harum omnium virium, quæ in singulis punctis $R$ exercentur, summa, illam unicam vim non excedat, quo certe in casu nulla pressio ad $F$ transibit. Inde jam tertium eruitur, $DF$, & $NL$ relate ad $OF$, $OD$, & $LD$ satis esse parvas, atque altiores lineolarum illarum potestates præ altioribus harum potestatibus negligi merito posse.

Iis in antecessum animadversis, licebit jam omne ponderis decrementum ex lateralium particularum centrifugis viribus factum ad calculum revocare. Esto in fig. 2. $NL = z$, $OL = x + z$, $OD = \surd(r^2 - FD^2) = r - \frac{FD^2}{2r}$, aut etiam $= r$, negligendo scilicet ad normam dictorum incomparabiliter parvum $\frac{FD^2}{2r}$:
Erit $LD = \surd(r^2 - x^2 - 2xz) = \surd(y^2 - 2xz)$, & vis centrifuga totalis in $D = \frac{c}{r}\surd(y^2 - 2xz)$, adeoque si radius sit ad peripheriam ut $1 : p$, erunt similes vires particularum omnium per circulum radio $LD$ descriptum in Sphæra dispositarum $= \frac{cp}{r}(y^2 - 2xz)$, & ea virium earumdem portio, quæ secundum $DF$ impenditur $=$

$$\frac{(cpx + cpz)}{r^2}(y^2 - 2xz) = \frac{cpxy^2}{r^2} + \frac{cpzy^2}{r^2} - \frac{2cpx_2z}{r^2}.$$

At vero ob verticales $FnD$, $OnN$ æquales, & $ONn$, $nDF$ rectos, erunt etiam $nFD$, $nON$ æquales inter se, unde si $NI$, fig. 3., dicatur $u$, habebitur

$$nN : nO = DL : DO = Dr : DR$$

$$\surd(y^2 - 2xz) : r = z - u : \frac{rz - ru}{\surd(y^2 - 2xz)}$$

Quod

Quod si gravitas absoluta in extima sphæræ nostræ superficie dicatur $g$, erit eadem in $R$ per prop. 73. lib. 1. Princ. Mathem. Newtoni $= \frac{g \cdot OR}{r}$; & pondus totale, gravitate aliquantulum minus, ob decrementum per vim centrifugam gravitati ipsi illatum; pondus vero, quod secundum $RD$ contra vires jam dictas agit, æquale ponderi eidem totali ducto in $\frac{DR}{OR}$. At quia quodcumque demum sit decrementum illud, gravitate tota multo minus est ex hypothesi, rejiciendo hic quoque terminum incomparabiliter parvum, assumi poterit vis totalis particulæ $R$ secundum $RD = \frac{g \cdot OR}{r} \cdot \frac{DR}{OR} = \frac{gz - gu}{\surd(y^2 - 2xz)}$, & similes vires particularum omnium totius circuli, radio $RI$ descripti erunt $\frac{(pgz - pgu) \cdot RI}{\surd(y^2 - 2xz)} =$ $\frac{(pgz - pgu)\surd(r^2 - x^2 - 2xu)}{\surd(y^2 - 2xz)}$. Extrahatur jam ope Newtoniani theorematis $P^m + \frac{m}{1} \cdot AQ + \frac{m-1}{2} \cdot BQ$ &c., ex utroque termino sua radix. Habebitur $\surd(r^2 - x^2 - 2xu) =$ $\surd(r^2 - x^2) - \frac{xu}{\surd(r^2 - x^2)} = y - \frac{xu}{y}$, & $\surd(y^2 - 2xz) = y - \frac{xz}{y}$, cæteris omnibus serierum terminis ob parvitatem evanescentibus. Itaque erunt eædem vires $= \frac{(pyz - pgu)\left(y - \frac{xu}{y}\right)}{y - \frac{xz}{y}} =$ $pgz - pgu$, divisionem scilicet juxta vulgares regulas instituendo, rejiciendoque terminos incomparabiliter parvos. Est porro

DL:

$DL : DO = Dr : DR = du : d \cdot FR$

$y - \frac{xz}{y} : r = du : \left( \frac{rdu}{y - \frac{xz}{y}} = \frac{rydu}{y^2 - xz} = \frac{rdu}{y} + \frac{rxzdu}{y^3} \right)$:

Erit ergo elementum virium similium, per totam superficiem Conicam revolutione ipsius $DF$ in sphæra genitam, impensarum $= (pgz - pgu) \left( \frac{rdu}{y} + \frac{rxzdu}{y^3} \right) =$

$\frac{rpgzdu}{y} - \frac{rpgudu}{y} + \frac{rpgz^2xdu}{y^3} - \frac{rpgzudu}{y^3}$;

& integrando erunt vires eædem totæ $=$

$\frac{rpgzu}{y} - \frac{rpgu^2}{2y} + \frac{rpgz^2xu}{y^3} - \frac{rpgzu^2}{2y^3}$.

Fiat $u = z$: Erunt vires per totam eam superficiem Conicam, contra virium centrifugarum circuli, radii $LD$, portiones illas impensæ $= \frac{rpgz^2}{2y} + \frac{rpgxz^3}{2y^3}$:

Unde vires a circulo radii $LD$ ad circulum radii $NF$ secundum $DF$ transmissæ erunt $=$

$\frac{cpxy^2}{r^2} + \frac{cpzy^2}{r^2} - \frac{2cpx^2z}{r^2} - \frac{rpgz^2}{2y}$,

& quæ in singulis punctis circuli hujus recipitur, similiter secundum $DF = \frac{cxy}{r^2} + \frac{czy}{r^2} - \frac{2cx^2z}{r^2y} - \frac{rgz^2}{2y^2}$. Est autem

$DL : DO = (Dd = LN) : DF$

$y - \frac{xz}{y} : r = z : \left( \frac{rzy}{y^2 - xz} = \frac{rz}{y} + \frac{rxz^2}{y^3} \right)$;

quare, cum vires eædem totæ in $F$, sint ad vires contra gravitatem particulæ $F$ exercitas, vi jam dictorum, ut $OF$ ad $FD$, seu $r$, ad $\frac{rz}{y} + \frac{rxz^2}{y^3}$, erit ponderis decrementum ex actione particularum circuli radii $LD$ in $F$ factum $=$

D (cxy

$$\left(\frac{cxy}{r^2} + \frac{czy}{r^2} - \frac{2cx^2z}{r^2y} - \frac{rgz^2}{2y^2}\right)\left(\frac{z}{y} + \frac{xz^2}{y^3}\right) =$$

$$\frac{cxz}{r^2} + \frac{cz^2}{r^2} - \frac{cx^2z^2}{r^2y^2} - \frac{rgz^3}{2y^3}.$$

Patet autem, quod si ex $F$ simili modo in aliam quamlibet $Op$ ducatur perpendicularis $Fd$, fig 4. tab. 1., atque ita successive, alii, atque alii successive habebuntur circuli in circulum radii $NF$ simili modo agentes: Atque ob angulos omnes $FDO$, $FdO$ rectos, puncta omnia $D$, $d$ erunt in semicirculo $FdDO$, super rectam $FO$ descripto, & circuli iidem in superficie curva, revolutione semicirculi $FdDO$ circa axem $AO$ genita. Quia vero est $Dd = \sqrt{\left(dz^2 + \frac{x^2dz^2}{y^2 - 2xz}\right)} =$

$$dz\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2 - 2xz}\right)} = dz\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^3z}{y^4}\right)} =$$

$dz\sqrt{\left(\frac{r^2}{y^2} + \frac{2x^3z}{y^4}\right)} = \frac{rdz}{y} + \frac{x^3zdz}{ry^3}$, erit elementum virium omnium, ab omnibus per superficiem eam dispositis materiæ particulis, ad singulas circuli, radii $NF$, particulas transmissarum, & contra ipsarum met particularum gravitatem agentium =

$$\left(\frac{cxz}{r^2} + \frac{cz^2}{r^2} - \frac{cx^2z^2}{r^2y^2} - \frac{rgz^3}{2y^3}\right)\left(\frac{rdz}{y} + \frac{x^3zdz}{ry^3}\right) =$$

$$\frac{cxzdz}{ry} + \frac{cx^4z^2dz}{r^3y^3} + \frac{cz^2dz}{ry} - \frac{cx^2z^2dz}{ry^3} - \frac{r^2gz^3dz}{2y^4};$$

quare integrando erunt vires totæ =

$$\frac{cxz^2}{2ry} + \frac{cx^4z^3}{3r^3y^3} + \frac{cz^3}{3ry} - \frac{cx^2z^3}{3ry^3} - \frac{r^2gz^4}{8y^4}.$$

Ad formulæ hujus complementum pro z substituendus erit maximus ipsius valor. At quoniam ubi z maximus est, amplius ullæ vires a lateralibus particulis ad $F$ usque non transmittuntur, facile valor idem determinabitur si fiat in superiori transmissarum virium expressione

cpxy

$$\frac{cpxy^2}{r^2}+\frac{cpzy^2}{r^2}-\frac{2cpx^2z}{r^2}-\frac{rpgz^2}{2y}=0$$

$$\frac{rpgz^2}{2y}-\frac{cpzy^2}{r^2}+\frac{2cpx^2z}{r^2}=\frac{cpxy^2}{r^2}$$

$$z^2-\frac{2cy^3z+4cx^2yz}{r^3g}=\frac{2cxy^3}{r^3g}$$

$$z^2-\frac{2cy^3z+4cx^2yz}{r^3g}+\left(\frac{2cx^2y-cy^3}{r^3g}\right)^2=\frac{2cxy^3}{r^3g}+\left(\frac{2cx^2y-cy^3}{r^3g}\right)^2$$

$$\pm z=\sqrt{\left(\frac{2cxy^3}{r^3g}+\frac{4c^2x^4y^2-4c^2x^2y^4+c^2y^6}{r^6g^2}\right)}\pm\frac{cy^3\mp 2cx^2y}{r^3g}.$$

Valorem hunc in antecedenti formula in locum ipsius $z$ subrogando, negligendoque omnes plusquam quadraticas vis centrifugæ, per $c$ expressæ, potestates, utpote relate ad $g$ evanescentes, pro totali ponderis decremento iis omnibus lateralibus pressionibus in $F$ facto prodibit $\frac{c^2x^2y^2}{2r^4g}$. Est porro ea vis centrifugæ particulæ $F$ portio, fig. 1., quæ secundum directionem $FP$ directioni gravitatis $FO$ perpendicularem exercetur $= c.\frac{FN}{BO}.\frac{ON}{BO}=\frac{cxy}{r^2}$: Itaque habemus theorema; vim centrifugam scilicet particulæ cujuslibet secundum directionem directioni gravitatis normalem, in Sphæra nostra esse mediam proportionalem, inter duplum gravitatis, & ponderis decrementum iis pressionibus lateralibus ibidem factum.

Pondus totale in loco quolibet $F$ erit $= g-\frac{cy^2}{r^2}-\frac{c^2x^2y^2}{2r^4g}$, & quidem quocumque signo $+$, aut $-$, $x$, & $y$ afficiantur. Quare formula hæc nostra in unoquoque quadrante habebit locum. Decrementum ponderis secundo formulæ ipsius termino indicatum, sub æquatore, ubi $y=r$, maximum erit: Sub polis, ubi $y=0$, erit nullum: Recedendo a polis æquatorem versus, & successive crescente $y$, fiet majus. Quod per ter-

tium effertur, in polis, & æquatore, ubi, aut $y$, aut $x = o$, similiter nullum erit; in Octantibus vero maximum: Nam si juxta methodum de maximis, & minimis fiat $-\frac{c^2x^2y\,dy}{r^4g} + \frac{c^2xy^2dx}{r^4g} = o$, habebitur $x = y$, hoc est punctum maximi in Octantibus erit, in quibus $x = y$. In locis hinc inde ab Octantibus æqualiter dissitis erit æquale hoc ipsum ponderis decrementum.

At vero quoniam terrestrium corporum vis centrifuga ad gravitatem minimam rationem habet, nec majorem ea, quæ est $1 : 289$, ut ipsi postmodum calculo eruemus, secundum hoc ponderis decrementum, ex lateralium particularum viribus centrifugis ortum, in Octantibus, ubi est maximum, $\frac{1}{668168}$ gravitatis totius non excedet. Poterit ergo ipsum negligi, & pondus totale in $F$ poni simpliciter $= g - \frac{cy^2}{r^2}$: Et negligi poterunt etiam quadraticæ omnes vis centrifugæ potestates; ut in sequentibus faciemus.



CA-

## CAPUT QUARTUM.

### *De mutationibus ex motu circulari ortis.*

ITa igitur ex circulari motu imminutis ſub æquatore Sphæræ noſtræ ponderibus, atque iiſdem, quæ prius, manentibus ſub polis, partium omnium æquilibrium ſublatum erit. Ad ipſum cito citius reſtituendum, fluidum omne circa æquatorem, ubi ſpecifice levius ex vi centrifuga redditum eſt, elevabitur, deprimeturque circa Polos, & in figuram rotundi ſolidi ſub æquatore protuberantis conformabitur: Quia vero vis centrifuga, ex qua mutatio hæc omnis ortum ſuum ducit, ad gravitatem, ut dictum eſt, minimam rationem habet, figuram eamdem novam, quam fluidum noſtrum præſeferet, a Sphærica parum abludere neceſſe erit. Exhibeat jam $ARED$, fig. 5. tab. 1., ipſius figuræ ſectionem, plano per polos $A$, & $E$ tranſeunte, factam, ponaturque, $OE=n$, $OR=m$, $OM=x$, $MV=y$, $OV=t$, & propterea ſit $t^2=x^2+y^2$; erit pondus abſolutum in $E=g$, in $R=g-c$, in alio quolibet loco $V=g-\frac{cy^2}{mt}$, ſi vis centrifuga ſub æquatore dicatur $c$, & gravitas, præſcindendo a quavis attractionum fluidi alteratione, in eodem ſtrato eadem maneat, quæ prius, conſtans ſcilicet, & $=g$. At quoniam columnarum quarumlibet $OR$, $OV$, in centro $O$ coëuntium pondera ad æquilibrium tuendum æqualia eſſe debent; erunt partium quarumcumque ſimilium, & in Columnis $OR$, $OV$ ſimiliter poſitarum pondera, inter ſe æqualia: Proinde æqualium partium, & ſimiliter in Columnis ſitarum pondera, erunt reciproce ut columnæ ipſæ, hoc eſt pondus in $V$ erit ad pondus in $R$, ut $OR:OV$, ſive ex jam dictis

$$g-\frac{cy^2}{mt}:g-c=m:t$$

gt

$$gt - \frac{cy^2}{m} = gm - cm$$

$$mtg - cy^2 = gm^2 - cm^2$$

$$t = \frac{(gm^2 - cm^2 + cy^2)}{mg}.$$

Hoc valore in priori æquatione $t^2 = x^2 + y^2$, loco $t$ posito, fluet, quod jam ingeniosissimus P. Boscovik ex S. J., in numquam satis laudandis dissertationibus de Telluris Figura, paululum operosiori calculo eruit, Figuram Terræ in hypothesi motus circularis, & gravitatis, pergendo a superficie ad centrum, decrescentis in simplici imminutarum distantiarum ratione, Sphæroidem oblatam esse, revolutione Ellipseos Apollonianæ genitam. Erit enim

$$\frac{(m^4g^2 - 2m^4gc + 2m^2gcy^2)}{m^2g^2} = x^2 + y^2$$

$$m^4g^2 - 2m^4gc - m^2g^2y^2 + 2m^2gcy^2 = m^2g^2x^2$$

$$x^2 : m^2 - y^2 = m^2g^2 - 2m^2gc : m^2g^2$$

$$x^2 : m^2 - y^2 = g - 2c : g;$$

unde cum sit $OE : OR = n : m = g - c : g$, & propterea $n^2 : m^2 = g^2 - 2cg : g^2 = g - 2c : g$, habebitur

$x^2 : m^2 - y^2 = n^2 : m^2$, quæ est æquatio ad Ellipsim Conicam.

Semiaxium hujus Sphæroidis differentia erit quarta proportionalis ad gravitatem, vim centrifugam, & semiaxem majorem. Siquidem ex superioribus

$$m : n = g : g - c$$

$$m - n : n = c : g - c$$

$$m - n : m = c : g.$$

Porro semiaxes ipsi facile in valore radii Sphæræ illius, in quam primo fluidum nostrum conformabatur, determinari poterit. Esto enim, fig. 6. tab. 1., Sphæra eadem $QRPM$, &

*ENAM*

*ENAM* sphærois, in quam postmodum per circularem motum abire fluidi massam debuisse omnem ostendimus: Notum est, quod si $OR$ vocetur $r$, erit Sphæræ totius soliditas $= \frac{2}{3}pr^3$. Erit etiam Sphæroidis ipsius oblatæ soliditas ex notis cubationem regulis $= \frac{2}{3}pm^2n$, idest (ubi pro $n$ substituatur valor vix modo inventus $m - \frac{cm}{g}$) erit $= \frac{2pgm^3 - 2pcm^3}{3g}$.

At quoniam eadem omnino est materiæ, & fluidi quantitas in Sphæroide $ENAM$, ac antea in Sphæra $QRPD$, debebit poni

$$\frac{2pgm^3 - 2pcm^3}{3g} = \frac{2}{3}pr^3$$

$$gm^3 - cm^3 = gr^3$$

$$m^3 = \frac{gr^3}{g-c}$$

$$m = r\sqrt[3]{\left(\frac{g}{g-c}\right)} = r\sqrt[3]{\left(1 + \frac{c}{g}\right)} = r + \frac{cr}{3g}.$$

Supra autem erat $n = m - \frac{cm}{g}$: Unde valore nuper invento in locum ipsius $m$ subrogato habebitur $n = r - \frac{2cr}{3g}$, & $m - n = \frac{cr}{g}$. Erit etiam $m - r = \frac{cr}{g}$, $r - n = \frac{2cr}{3g}$; hoc est, erit differentia radii $OP$, & semiaxis minoris $OA$, dupla semiaxis majoris $ON$, & radii ejusdem differentiæ.

Cæterum id universim in Sphæroide quavis compressa, & proxime ad Sphæram accedente, habere locum, independenter a vi centrifuga, & gravitate, ex quibus Sphæroidis hujus nostræ formationem deduximus, facili negotio erui potest. Esto $OP$ ut supra $= r$, $AP + RN = u$, $RN = z$, erit Sphæroidis

roidis soliditas $= \frac{2}{3} p (r^2 + 2rz + z^2)(r - u + z)$, unde ipsam æquando soliditati Sphæræ, habebitur

$$\frac{2}{3} p (r^2 + 2rz + z^2)(r - u + z) = \frac{2}{3} pr^3,$$

& negligendo, ob suppositam Sphæroidis, & Sphæræ affinitatem, quadraticas, & plusquam quadraticas $u$, & $z$ potestates, utpote ob parvitatem evanescentes,

$$r^3 - r^2 u + 3r^2 z = r^3$$

$$r^2 u = 3r^2 z$$

$$u = 3z$$

$$u - z = 2z.$$

At quoniam fluidum nostrum post motum circularem impressum, circa æquatorem ascendit, & prope polos depressum est, illud in loco aliquo æquatori, & polis interjacente eamdem retinuisse altitudinem supra centrum necessum erit. Punctum $B$, in quo Sphæra, & Sphærois ejusdem cum Sphæra soliditatis, & ad ipsam proxime accedens, intersecantur, ita exhiberi universim potest. $ON = r + z$, $OE = r - 2z$, ex jam dictis; propterea si $HB$ sit $= y$, habebitur ex Ellipsis natura

$$OH^2 = \frac{(r - 2z)^2}{(r + z)^2} (r^2 + 2rz - y^2) = \frac{(r - 4z)}{r + 2z} (r^2 + 2rz - y^2) =$$

$$r^2 - 4zr - y^2 \frac{(r - 4z)}{r + 2z} = r^2 - 4rz - y^2 + \frac{6zy^2}{r}; \ \&$$

$$OB = r = \surd \left( y^2 + r^2 - 4rz - y^2 + \frac{6zy^2}{r} \right)$$

$$r = \surd \left( r^2 - 4rz + \frac{6zy^2}{r} \right)$$

$$r = r - 2z + \frac{3zy^2}{r^2}$$

$$2r^2 = 3y^2$$

$$r^2 : y^2 = 3 : 2$$

$$r : y = \surd 3 : \surd 2 = 1.732 : 1.414 = 100000 : 81639;$$

qui est sinus 54° 44′, quam proxime. Id

Id ipſum faciliori etiam calculo, in caſu noſtro, ſuperioribus aliis formulis utendo, erui poterat. Supra enim erat

$OB = r = \frac{m^2 g - m^2 c + cy^2}{mg}$, unde

$m^2 g - m^2 c + cy^2 = mgr$;

&, ſubſtituendo $r - \frac{2cr}{3g}$ pro $n$, & $r + \frac{cr}{3g}$ pro $m$,

$r^2 g + \frac{2cr^2}{3} - r^2 c + cy^2 = r^2 g + \frac{cr^2}{3}$

$\frac{cr^2}{3} - cr^2 + cy^2 = 0$

$3y^2 = 2r^2$

$r^2 : y^2 = 3 : 2$.

Poſitum etiam fuit ſupra pondus totale in loco quolibet $B$ $g - \frac{cy^2}{mr}$. Subſtituatur jam pro $r$ valor $\frac{m^2 g - m^2 c + cy^2}{mg}$; & pro totali pondere habebitur $g - \frac{gcy^2}{m^2 g - m^2 c + cy^2}$, ſive, diviſionem juxta vulgares regulas inſtituendo, rejiciendoque terminos præ aliis evaneſcentes, $g - \frac{cy^2}{m^2}$. Eſt autem in Ellipſi $y^2 = (n^2 - x^2)\frac{m^2}{n^2}$: Quare hoc valore in ſuperiori expreſſione poſito, erit pondus idem $g - c + \frac{cx^2}{n^2}$; & quia pondus ſub æquatore, ubi $x = 0$, fit $= g - c$, habebitur theorema: Ponderis ſcilicet incrementa pergendo ab æquatore ad polos eſſe quadratis applicatarum axi majori Sphæroidis proportionalia. At quoniam, ut in Cap. 2. diximus, gravitas eſt ad

omnes, & singulas materiæ particulas; immutata, per novam hanc fluidi nostri figuram, particularum omnium positione, ac distantia, gravitas etiam ipsa, & pondus, & fluidi totius forma, ac dispositio, mutationes alias subibit. Eas postmodum calculo persequemur: Interim repetenda altius res est.



CA-

## CAPUT QUINTUM.

### *De attractione corporum rotundorum.*

PRoblema. Si ad solidi rotundi cujuslibet $BCHLB$, fig. 7. tab. 1., ex altera parte $H$ sine ullis flexibus, ac regressibus in se redeuntis, puncta singula tendant æquales vires centripetæ, crescentes, aut decrescentes in quavis distantiarum ratione; invenire gravitatem corpusculi in quovis axis $AH$ loco $A$ constituti.

Resolutio. In axe $AH$, recta quavis $AP$ ad libitum sumpta, veluti radio, describatur in plano aliquo $BCOH$, quod solidi rotundi sit sectio, per axem facta, arcus circularis $PC$; & ratio gravitatis corpusculi $A$, in quamvis arcus illius molleculam, exprimatur quantitate $\frac{1}{AP^n}$ (per exponentem $n$ intelligo numerum quemlibet, negativum, positivum, integrum, fractum): Tum in plano eodem descripta intelligatur curva $DTF$, talis naturæ, ut sit $\frac{1}{2} PT = AP^n$, ac ducta ex $C$ perpendiculari $CR$ in semiordinatam $PT$, fiat $PT : PR = PR : PQ$. Dico, quod tanget punctum $Q$ curvam $BQH$, cujus area gravitatem quæsitam exprimet.

Demonstratio. Ducatur ex puncto $C$ recta $CA$, nec non $CN$ ad axem $AH$ normalis, & $cn$ ipsi $CN$ infinite propinqua. Erit vis, qua punctum $C$ trahet corpusculum $A$ secundum $AC$, ut $\frac{1}{AP^n}$, & qua trahet secundum $AH$, ut $\frac{AN}{AP^{n+1}}$. Intelligatur jam arcum $CP$ circa axem $AH$ revolvi, & revolutione sua stratum Sphæricum convexo-concavum in solido nostro designare. Erit vis, qua circulus totus revolutione puncti $C$ genitus, secundum $AH$ trahet idem corpusculum, ut $\frac{CN . AN}{AP^{n+1}}$. Porro quia est $Cc = \frac{AC . Nn}{CN} = \frac{AP . Nn}{CN}$, erit

 atra-

attractio zonulæ circularis, revolutione ipsius $Cc$ genitæ; ut $\frac{AN \cdot Nn}{AP^n}$. Quo patet attractionum strati illius sphærici elementa, esse inter se, ut homologa elementa trapezii $NMGP$, in triangulo $AGP$ secti, in quo perpendiculares omnes $NM$ ad punctum quodvis rectæ $AP$ sunt $= \frac{AN}{AP^n}$: Unde attractio tota exprimetur area $NMGP$, sive $\frac{1}{2} PG \cdot AP - \frac{1}{2} NM \cdot AN = \frac{AP^2 - AN^2}{2AP^n} = \frac{CN^2}{2AP^n}$; & attractio laminæ sphæricæ, crassitiei infinite parvæ $Pp$, exprimetur quantitate $\frac{CN^2 \cdot Pp}{2AP^n}$. Quod si ergo sit $\frac{1}{2} PT = AP^n$, ac insuper $PT : PR = PR : PQ$; erit $PQ = \frac{PR^2}{PT} = \frac{PR^2}{2AP^n} = \frac{CN^2}{2AP^n}$; hoc est semiordinata $PQ$ exprimet attractionem strati sphærici illius, & $PQ \cdot Pp$, elementum areæ $BQHB$ exprimet attractionem laminæ sphæricæ convexo-concavæ ad solidum $BCHL$ terminatæ, & crassitiei infinite parvæ $Pp$. Aucto jam, imminutoque radio $AP$, divisum intelligatur solidum (dividi enim poterit semper, quando regressus, flexusque contrarios non habeat, atque ex altera parte $H$ redeat in se se), divisum inquam intelligatur solidum in innumeras hasce laminas sphæricas: Singularum attractiones erunt, ut respondentia areæ $BQHB$ elementa, & solidi totius attractio, seu gravitas totalis corpusculi in $A$ positi, erit ut area eadem tota $BQHB$: Quod erat demonstrandum.

Atque ut ad casus peculiares quosdam, & varias gravitatis hypotheses descendamus, sit primo gravitas ipsa corpusculi in molleculam eadem pro quibuscumque distantiis constans: Erit in hoc casu $n = 0$, $PT$ constans, & $= 2$; & curva $DTF$ in rectam degenerabit, axi $AH$ parallellam, & ab eodem axe remotam quantitate constanti pariter, & $= 2$. Erit etiam

$PQ$

$PQ = \frac{1}{2} CN^2$, adeoque ex data propositi solidi specie, & ratione $CN$ ad $AP$ determinabitur quæsita atractio.

Exemplum primum. Proponatur segmentum sphæricum $HDLN$, fig. 8. tab. 1., & corpusculum in centro $A$ situm sit. Erit $NB^2 = MC^2 = 2\,AN\,.\,NM + NM^2$, adeoque $MO$ semiordinata curvæ $NOQ$, quæ atractionem exprimit, est $= AN\,.\,NM + \frac{NM^2}{2}$. Liquet ergo curvam ipsam $NOQ$ esse arcum Parabolæ Apollonianæ, per $N$ transeuntis, descriptæque circa axem $FS$, per centrum $A$ perpendiculariter ad radium $AD$ ductum. Parameter hujus Parabolæ $= 2$, vertex $F$ ab $A$ remotus recta $FA = \frac{1}{2} AN^2$. Est porro area $FNQP = \frac{1}{3} FP\,.\,PQ$, & area $FNV = \frac{1}{3} FV\,.\,VN$, rectangulum vero $VNDP = VP\,.\,VN$: Quare erit area $NQD =$
$\frac{1}{3} FP\,.\,PQ - \frac{1}{3} FV\,.\,VN - VP\,.\,VN$; hoc est (substitutis pro $FP$ rectis $AN + ND$, $\frac{1}{2} AN^2 + DQ$ pro $PQ$, $AN$ pro $FV$, $\frac{1}{2} AN^2$ pro $VN$, & $ND$ pro $VP$), erit $= \frac{1}{3} AN\,.\,DQ + \frac{1}{3} ND\,.\,DQ + \frac{1}{3} AN\,.\,\frac{1}{2} AN^2 + \frac{1}{3} ND\,.\,\frac{1}{2} AN^2 - \frac{1}{3} AN\,.\,\frac{1}{2} AN^2 - ND\,.\,\frac{1}{2} AN^2 =$
$\frac{1}{3} AN\,.\,DQ + \frac{1}{3} ND\,.\,DQ - \frac{1}{3} ND\,.\,AN^2$, sive (substituendo rursus $AN\,.\,ND + \frac{1}{2} ND^2$ pro $DQ$), erit $= \frac{1}{3} AN^2\,.\,ND + \frac{1}{6} AN\,.\,ND^2 + \frac{1}{3} AN\,.\,ND^2 + \frac{1}{6} ND^3 - \frac{1}{3} ND\,.\,AN^2 = \frac{1}{2} AN\,.\,ND^2 + \frac{1}{6} ND^3$.

Exemplum alterum. Esto solidum $AFEP$, fig. 1. tab 2., genitum revolutione trianguli isoscelis $AFP$, & segmenti circularis $FEP$, uno trianguli, cui unitur, latere $AF$, tamquam radio, descripti, & corpusculum illud in vertice $A$ tangat.

gat. Erit $AF : FD = AC : CB$, adeoque
$CB^2 = OH^2 = \frac{AC^2 . FD^2}{AF^2} = \frac{AO^2 . FD^2}{AF^2}$, & $OL$ semiordinata curvæ nostræ $= \frac{AO^2 . FD^2}{2AF^2}$. Quare simili modo hæc atractionum curva $ALM$ erit Parabola Apolloniana, vertice $A$, & parametro $\frac{2AF^2}{FD^2}$ circa axem $AN$, ad axem solidi $AE$ perpendicularem descripta. Ipsius area erit $=$
$\frac{1}{3} AE . EM = \frac{1}{3} AE . \frac{AE^2 . FD^2}{2AF^2} = \frac{1}{6} AE . FD^2$.

Quod si atractio solius Coni revolutione trianguli $AFP$ geniti desideretur, ex $\frac{1}{6} AE . FD^2$ subtrahenda erit expressio atractionis segmenti sphærici, geniti revolutione segmenti circularis $FEP$. Hæc per exemplum primum est
$\frac{1}{2} AD . DE^2 + \frac{1}{6} DE^3$; quare erit atractio Coni, ut

$\frac{1}{6} AE . FD^2 - \frac{1}{2} AD . DE^2 - \frac{1}{6} DE^3 =$

$\frac{1}{6} AE . (2AD . DE + DE^2) - \frac{1}{2} AD . DE^2 - \frac{1}{6} DE^3 =$

$\frac{1}{3} AE . AD . DE + \frac{1}{6} AE . DE^2 - \frac{1}{2} AD . DE^2 - \frac{1}{6} DE^3 =$

$\frac{1}{3} AD^2 . DE + \frac{1}{3} AD . DE^2 + \frac{1}{6} AD . DE^2 + \frac{1}{6} DE^3 - \frac{1}{2} AD . DE^2 - \frac{1}{6} DE^3 =$

$\frac{1}{3} AD^2 . DE$. Est autem in Conis similibus $AD^2$ ut $AF^2$, & $DE$ ut $AF$: Quare in iisdem aucto, & imminuto ad libitur latere $AF$, augebitur etiam, & imminuetur gravitas corpusculi $A$ in triplicata ratione ipsius $AF$.

Exemplum tertium. Quæratur atractio solidi $CBLOQDC$, fig. 2. tab. 2., in quo $BL$, & $DQ$ parallellæ sunt, $BCD$, & $LOQ$ sunt arcus circulares radiis $HC$, & $HO$ descripti; &

cor-

corpusculum sit in $H$. Ducatur $PD$, & $LQ$. Erit $FM = AN = RB$, & $AV = \frac{1}{2} AN^2 = \frac{1}{2} RB^2 = \frac{1}{2} (2HR \cdot RC + RC^2) = HR \cdot RC + \frac{1}{2} RC^2$. Quare pro hoc casu atractionum curva in rectam $ER$ degenerabit, axi $HO$ parallellam, ab eoque remotam recta $AV = HR \cdot RC + \frac{1}{2} RC^2$, & solidi atractio erit ut totum rectangulum $CERO$, sive ut $CO \cdot HR \cdot RC + \frac{1}{2} CO \cdot RC^2$. Quod si atractio Cylindri $RBLPQD$ desideretur, ab atractione solidi nostri subtrahenda erit atractio segmenti sphærici $LOQP$, tum atractio segmenti $BCDR$ addenda: Id quod per exemplum primum, ad normam eorum, quæ in secundo dicta sunt, facili negotio præstabitur; atque ita problema nostrum ad solida etiam nonnulla, ex altera sui parte in se non redeuntia, extendetur.

Fiat jam altera hypothesis gravitatis, ponaturque ipsam crescere in aliqua distantiarum ratione. Erit $n$ numerus aliquis negativus, & curva $DTF$ (fig. 7. tab. 1.) erit ex genere Hyperboloidum circa asymptotum $AH$ descriptarum, cujus species determinato numero $n$ determinabitur. Ita, si gravitas crescat in ea ratione, in qua crescunt simplices corpusculi distantiæ, hoc est sit $n = -1$; erit $\frac{1}{2} PT$ reciproce ut $AP$, seu $PT \cdot AP = 2$: Adeoque curva $DTF$ erit Hyperbola Apolloniana verticis $A$, & asymptoti $AH$.

Exemplum. Retineatur eadem gravitatis in ratione distantiarum crescentis hypothesis, & corpusculum in centro $B$, fig. 3. tab. 2., solidi, revolutione Lunulæ Hippocratis $MDQRM$ circa axem $BQ$ geniti, collocetur. Ducatur etiam $DR$, & radio $BC$ describatur arcus circularis $CN$, erit $BC^2 =$

$$(BO + OC)^2 = BH^2 + HC^2 = (BT + TH)^2 + TQ^2 - TH^2,$$
$$BO^2 + 2BO \cdot OC + OC^2 = BT^2 + 2BT \cdot TH + TH^2 + TQ^2 - TH^2,$$
$$BO^2 + 2BO \cdot OC + OC^2 = BT^2 + 2BT \cdot TH + TQ^2.$$

At

At vero ex Lunulæ natura est $BO^2 = BT^2 + TQ^2$; igitur

$2BO . OC + OC^2 = 2BT . TH,$

$TH : 2BO + OC = OC : 2BT,$

hoc est, in hac Hippocratis Lunula abscissæ; a cento $F$ supputatæ, erunt quartæ proportionales ad $BQ$, $OC$, & $PC$. Exinde solidi atractio ita determinabitur,

$$HC^2 = NA^2 = TQ^2 - TH^2 = TQ^2 - \frac{BO^2 . OC^2}{BT^2} - \frac{BO . OC^3}{BT^2} - \frac{OC^4}{4BT^2} =$$

$$BT^2 - 2OC^2 - \frac{OC^3 \sqrt{2}}{BT} - \frac{OC^4}{4BT^2}.$$

Hæc ipsius $NA^2$ expressio ducta in $\frac{1}{2} BN$, sive $\frac{1}{2} BC$, aut $\frac{BT}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} OC$, dabit expressionem rectæ $NF$, semiordinatæ quæsitæ curvæ, in valoribus solarum $BT$, & $OC$, seu $MN$. Ea erit curva quinti gradus, habebitque semiordinatam in puncto $M = \frac{BT^3}{\sqrt{2}}$. Area ipsius in terminis finitis juxta vulgares regulas erui poterit. At nobis hic ad alia properantibus non vacat fusius in hypothesibus Mathematicis potius, quam Physicis immorari.

Sinamus itaque has omnes, & veniamus ad eam gravitatis legem, quæ, ut in Cap. 2. vidimus, naturæ lex est. Gravitas ipsa in recessu a quavis materiæ particula decrescat in duplicata ratione crescentium distantiarum: Erit $n = 2$, & curva $DTF$, fig. 7. tab. 1., erit Parabola Apolloniana, verticis $A$, parametri $\frac{1}{2}$, axis ad $AH$ in puncto $A$ perpendicularis.

Progrediamur modo ad exempla.

Exemplum primum. Tangat corpusculum $A$, fig. 4. tab. 2., Sphæram $AHLM$, & quæratur ipsius gravitas. Sumpta ad libitum quavis $AC$, ducatur de more arcus $CE$, junganturque $EA$, & $EL$. Ob triangulorum $APE$, $AEL$ similitudinem, erit

erit $AP = \frac{AE^2}{AL} = \frac{AC^2}{AL}$; adeoque $PE^2 = CD^2 = (AL - AP).AP = AC^2 - \frac{AC^4}{AL^2}$: Erit etiam $CO = \frac{CD^2}{2AC^2} = \frac{1}{2} - \frac{AC^2}{2AL} = \frac{AL^2 - AC^2}{2AL^2}$; hoc est atractionum curva erit hic etiam Parabola Apolloniana, parametri $2AL^2$, axis $AN$ ad $AL$ in puncto $A$ perpendicularis, verticis $N$ ab $A$ remoti quantitate $AN = \frac{1}{2}$. Area $ANLA$ erit $= \frac{2}{3} AL \cdot AN = \frac{1}{3} AL$, sive $\frac{1}{3} AR$, si $R$ sit Sphæræ centrum.

Exemplum alterum: Esto $A$, fig. 5. tab. 2., polus Sphæroidis compressæ $AHLN$, & præponatur casus, omnium simplicissimus, quod ipsa ad Sphæram proxime accedat, & corpusculum in polo $A$ situm sit. Radio quovis $AC$, ducto, ut supra, arcu $CD$, erit elementum atractionis totius Sphæroidis ut $\frac{PD^2}{2AC^2}$, sive $CG$ ducta in elementum rectæ $AC$. At hic præstat Analysim adhibere. Ponatur ergo $AP = z$, $AC = x$, $AM = n$, $HM - AM = b$; erit

$$PD^2 = \left(\frac{n^2 + 2nb + b^2}{n^2}\right)(2nz - z^2),$$

sive, negligendo quadraticas ipsius $b$ potestates, utpote terminos, ob proximitatem Sphæroidis cum Sphæra, parvitate evanescentes, erit

$$PD^2 = 2nz + 4bz - z^2 - \frac{2bz^2}{n}.$$ Est autem

$$AD^2 = AP^2 + PD^2;$$ itaque

$$x^2 = 2nz + 4bz - \frac{2bz^2}{n}$$

$$z^2 - 2nz - \frac{n^2 z}{b} = -\frac{nx^2}{2b}.$$

Fiat jam compendii ergo, $2n + \frac{n^2}{b} = c$: Habebitur

$$z^2 - cz + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{nx^2}{2b}$$

$$\pm z \mp c = \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{nx^2}{2b}\right)}$$

$$z = n + \frac{n^2}{2b} - \sqrt{\left(n^2 + \frac{n^3}{b} + \frac{n^4}{4b^2} - \frac{nx^2}{2b}\right)}.$$

Patet vero, quod si ad radicis quadraticæ extractionem ex $\left(n^2 + \frac{n^3}{b} + \frac{n^4}{4b^2} - \frac{nx^2}{2b}\right)$ ponatur in Newtoniana serie

$P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ$ &c., ponatur inquam

$m = \frac{1}{2}$, $Q = \frac{-nx^2}{2b\left(n^2 + \frac{n^3}{b} + \frac{n^4}{4b^2}\right)}$, erit

$$P^m = n + \frac{n^2}{2b},$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{1}{2}\left(n + \frac{n^2}{2b}\right)\left(\frac{-nx^2}{2b\left(n^2 + \frac{n^3}{b} + \frac{n^4}{4b^2}\right)}\right) = \frac{-nx^2}{4b\left(n + \frac{n^2}{2b}\right)},$$

seu, divisionem instituendo, rejiciendoque terminos incomparabiliter parvos, quadraticas scilicet, & plusquam quadraticas ipsius $b$ potestates,

$$\frac{m}{1}AQ = -\frac{x^2}{2n} + \frac{bx^2}{n^3} = B,$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = -\frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2n} + \frac{bx^2}{n^3}\right)\left(\frac{-nx^2}{2b\left(n^2 + \frac{n^3}{b} + \frac{n^4}{4b^2}\right)}\right) =$$

(x

$$\left(\frac{x^2}{8n} - \frac{bx^2}{4n^2}\right)\left(\frac{-4b^2nx^2}{2b\left(4b^2n^2 + 4bn^3 + n^4\right)}\right) =$$

$$\left(\frac{x^2}{8n} - \frac{bx^2}{4n^2}\right)\left(\frac{-2bx^2}{n^3 + 4bn^2 + 4b^2n}\right) = -\frac{bx^4}{4n^4}.$$ Ergo

$$z = n + \frac{n^2}{2b} - n - \frac{n^2}{2b} + \frac{x^2}{2n} - \frac{bx^2}{n^2} + \frac{bx^4}{4n^4}$$

$$z = \frac{x^2}{2n} - \frac{bx^2}{n^2} + \frac{bx^4}{4n^4}$$

$$z^2 = \frac{x^4}{4n^2} - \frac{bx^4}{n^3} + \frac{bx^6}{4n^5}.$$ At erat

$$PD^2 = 2nz + 4bz - z^2 - \frac{2bz^2}{n},$$ propterea

$$PD^2 = x^2 - \frac{2bx^2}{n} + \frac{bx^4}{2n^3} + \frac{2bx^2}{n} - \frac{x^4}{4n^2} + \frac{bx^4}{n^3} - \frac{bx^6}{4n^5} - \frac{bx^4}{2n^3}$$

$$PD^2 = x^2 - \frac{x^4}{4n^2} + \frac{bx^4}{n^3} - \frac{bx^6}{4n^5}$$

$$\frac{PD^2}{2AC^2} = CG = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8n^2} + \frac{bx^2}{2n^3} - \frac{bx^4}{8n^5}.$$

Erit itaque elementum atractionis Sphæroidis nostræ, ut

$$\frac{1}{2}dx - \frac{x^2dx}{8n^2} + \frac{bx^2dx}{2n^3} - \frac{bx^4dx}{8n^5}:$$

Et atractio segmenti indeterminati, cujus altitudo $AC$, ut

$$\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{24n^2} + \frac{bx^3}{6n^3} - \frac{bx^5}{40n^5}:$$

Et pro $x$ substituendo $2n$, erit atractio totius Sphæroidis, ut $n - \frac{1}{3}n + \frac{4}{3}b - \frac{4}{5}b$, sive ut $\frac{2}{3}n + \frac{8}{15}b$.

Idem omnino eruetur, ubi calculo, ad normam prop. 90. lib. 1. Princ. Mathem. Newtoni, instituto, citra infinitas series, quod præclarissimi ipsius Commentatores fecerunt, in notis ad prop. 19. lib. 3. litt. r, Sphæroidis nostræ atractio investigetur. Retineatur enim circuli, cujus radius $AD$, fig. 6. tab. 2., atractionem in corpusculum $P$, normaliter ad planum circuli, & in recta $PA$ ad centrum ipsius $A$ ducta, insistens esse ut $1 - \frac{PA}{PD}$: Quod in ea 90. prop. demonstratum sinthetice est, quodque Analytice erui ita posset. Sit $AD=r$, $PA=t$, $AE=x$, erit $PE=\surd(t^2+x^2)$, & atractio puncti cujuslibet $E$, secundum $PE$ erit, ut $\frac{1}{t^2+x^2}$, atractio vero secundum $PA$ erit, ut $\frac{t}{(t^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cum ergo annulus cujus latitudo $Ee$, & radius $AE$, sit, ut $-x\,dx$; erit atractio annuli ipsius circularis in corpusculum $P$, secundum $PA$, ut $\frac{-tx\,dx}{(t^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare integrando, erit atractio circuli radio indeterminato $AE$ descripti, ut $\frac{-t}{\surd(t^2-x^2)}+C$, sive ut $\frac{-t}{\surd(t^2-x^2)}+1$, quia ubi circuli radius $=o$, atractio itidem nulla est. Substituatur jam $r$ in locum ipsius $x$, & atractio circuli totius radio $AD$ descripti, in corpusculum $P$, erit ut $1 \frac{-t}{\surd(t^2+r^2)}$, sive ut $1-\frac{PA}{PD}$. Quo patet data eadem corpusculi a centro distantia $PA$, & radio circuli $AD$ in infinitum protracto, gravitatem corpusculi in circulum totum fieri ut 1, sive circuli infiniti, & ad finitam distantiam positi atractionem finitam esse. Patet etiam, quod si $PD$, & $PA$ protrahantur utcumque in $K$, & $H$, & super $AH$ infiniti circuli radiis $FK$, $fk$ priori radio $AD$ parallellis descripti intelligantur, ob constantem rationem $PF:PK$, & $Pf:Pk$, eadem erit singulorum atractio, adeoque Coni to-

totius ex his omnibus efformati atractio, erit ad frusti cujuslibet atractionem, ut axis Coni, ad frusti axem: Quemadmodum in admirabili dissertatione de flu., & refl. maris lem. 3. a Cl. Mac-Laurino statutum est.

Hisce jam positis concipiatur Sphærois ipsa $AHLN$, fig. 1. tab. 3., ductis infinitis planis axi $AL$ normalibus, in infinitos, & pariter eidem axi normales, circulos divisa. Unius ex his radius sit $PD$: Cæteris ut supra manentibus, erit ipsius atractio, ut

$$1 - \frac{AP}{AD} = 1 \frac{-z}{\sqrt{\left(2nz + 4bz - \frac{2bz^2}{n}\right)}} = 1 \frac{-nz}{\sqrt{(2n^3z + 4n^2bz - 2nbz^2)}}$$

Extrahatur ad normam Newtoniani theorematis radix quadrata: In ipso erit

$$P^m = n\sqrt{(2nz)}$$

$$\frac{m}{1} AQ = b\sqrt{(2nz)} - \frac{bz\sqrt{(2nz)}}{2n}.$$

Quare rejectis terminis aliis ob parvitatem evanescentibus; erit atractio, ut $1 \frac{-nz}{n\sqrt{(2nz)} + b\sqrt{(2nz)} - \frac{bz\sqrt{(2nz)}}{2n}}$,

tum divisionem simili lege instituendo, ut

$$1 - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(2n)}} + \frac{b\sqrt{z}}{n\sqrt{(2n)}} - \frac{bz\sqrt{z}}{2n^2\sqrt{(2n)}}:$$

Et elementum atractionis totius Sphæroidis erit, ut

$$dz - \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(2n)}} + \frac{bdz\sqrt{z}}{n\sqrt{(2n)}} - \frac{bzdz\sqrt{z}}{2n^2\sqrt{(2n)}}.$$

Unde, ad fluentes transeundo, erit atractio segmenti indeterminati, ut $z - \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{(2n)}} + \frac{2bz^{\frac{3}{2}}}{3n\sqrt{(2n)}} - \frac{2bz^{\frac{5}{2}}}{10n^2\sqrt{(2n)}}$:

Et

Et pro z substituendo $2n$, erit atractio totius Sphæroidis, ut $2n - \frac{4n}{3} + \frac{4b}{3} - \frac{4b}{5}$, sive demum ut $\frac{2n}{3} + \frac{8b}{15}$. Ubi etiam quadrata ipsius $b$ retineantur, atractio prodit ut $\frac{2n}{3} + \frac{8b}{15} - \frac{4b^2}{21n}$. Similis, sed paullo operosior est calculus.

Neque vero difficilius nobis res cederent, ubi atractio Sphæroidis nostræ universaliter exhibenda esset, in quovis axis $AL$ producti puncto $O$, fig. 2. tab. 3., corpusculum reperiatur. Esto enim $AO=f$: Cæteris ut supra stantibus, erit atractio circuli, cujus radius $PD$, ut

$$1 - \frac{OP}{OD}, \text{ sive ut } 1 \frac{-(f+z)}{\sqrt{(f^2+2fz+2nz+4bz-\frac{2bz^2}{n})}}:$$

Et elementum atractionis Sphæroidis erit, ut

$$dz \frac{-(f+z)\,dz}{\sqrt{(f^2+2fz+2nz+4bz-\frac{2bz^2}{n})}}:$$

Et radicem iisdem, quibus supra, legibus extrahendo, ut

$$dz \left( \frac{-(f+z)\,dz}{\sqrt{(f^2+2fz+2nz+4bz)} \frac{-bz^2}{n\sqrt{(f^2+2fz+2nz+4bz)}}} \right)$$

Ac demum dividendo, ut

$$dz \frac{-(f+z)\,dz}{\sqrt{(f^2+2fz+2nz+4bz)}} \frac{-(f+z)\,bz^2\,dz}{n(f^2+2fz+2nz+4bz)^{\frac{3}{2}}},$$

quæ formula, ut Analystæ norunt, Algebraice integrari potest. Videantur alia inter Analyseos opera, celeberrimæ D. Agnesi institutionum liber tertius cap. 1., in quo ea, quæ ingeniosissimæ fœminæ propria est, perspicuitate, ac ordine, dif-

difficillimam calculi integralis partem, integrationum scilicet regulas mirifice enucleat. Ipsi ab integranda formula hac nostra, calculi tœdio parcentes, supersedemus. Satis sit ostendisse Geometriam nobis non defuturam, semel ac generalius, quam hactenus factum sit, omnis de Sphæroidum attractione tractatio habenda esset.

Extendi etiam posset hæc eadem methodus ad solidorum quorumdam attractiones, quæ ex figuræ alicujus, circa axem, in quo est corpusculum, rotatione non gignuntur. Ex. ca. collocetur corpusculum in æquatore Sphæroidis jam memoratæ, & quæratur corpusculi gravitas. Ductis simili modo infinitis planis, ad axem majorem rectis, dividetur Sphærois in infinitas Ellipses, Ellipsi generatrici similes, ut ex Conicis notum est. $HB$, fig. 3. tab. 3., dicatur $z$; erit axis minor $BQ$ Ellipseos in $B$ sectæ $= \frac{n}{n+b} \sqrt{(2nz + 2bz - z^2)}$, major vero $= \sqrt{(2nz + 2bz - z^2)}$. Quia vero Sphærois nostra proxime ad Sphæram accedit, proxime etiam ad circulos accedent Ellipses istæ: Propterea assumi poterit Ellipseos cujuslibet, in $B$ sectæ attractionem, eamdem esse, quæ circuli ejusdem areæ, & positionis, seu qui in eodem puncto $B$ perpendiculariter axem secet, & radium habeat $BR$, medium proportionalem inter semiaxes Ellipseos, æqualem scilicet $\sqrt{\left(\frac{n}{n+b}(2nz + 2bz - z^2)\right)}$.

Circuli hujus attractio ex dictis erit, ut

$$1 - \frac{HB}{HR} = 1 \frac{-z}{\sqrt{\left(z^2 + \frac{n}{n+b}(2nz + 2bz - z^2)\right)}} :$$

Et elementum attractionis totius Sphæroidis, ut

$$dz \frac{-zdz}{\sqrt{\left(z^2 + \frac{n}{n+b}(2nz + 2bz - z^2)\right)}}, \text{ sive ut } dz \frac{-zdz}{\sqrt{\left(2nz + \frac{bz^2}{n}\right)}} :$$

Et

Et radicem extrahendo, ut $dz \quad \frac{-zdz}{\left(\sqrt{(2nz)} + \frac{bz\sqrt{z}}{2n\sqrt{(2n)}}\right)}$

Tum dividendo, ut $dz - \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(2n)}} + \frac{bzdz\sqrt{z}}{4n^2\sqrt{(2n)}}$.

Quare integrando erit attractio segmenti indeterminati nostræ Sphæroidis, ut $z - \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{(2n)}} + \frac{2bz^{\frac{5}{2}}}{20n^2\sqrt{(2n)}}$:

Ac demum, substituendo $2n + 2b$ pro $z$, & $2n\sqrt{(2n)} + 3b\sqrt{(2n)}$ pro $z^{\frac{3}{2}}$, nec non $4n^2\sqrt{(2n)} + 10nb\sqrt{(2n)}$ pro $z^{\frac{5}{2}}$, erit Sphæroidis totius attractio ut $2n + 2b - \frac{4}{3}n - 2b + \frac{2}{5}b$, seu $\frac{2}{3}n + \frac{2}{5}b$. Retentis ipsis $b^2$ erit, ut $\frac{2}{3}n + \frac{2}{5}b + \frac{b7b^2}{45n}$.



CA-

## CAPUT SEXTUM.

*De comparatione gravitatis in variis homogeneæ Sphæroidis locis.*

AT vero expressiones hasce omnes inter se comparemus, videamusque quænam exinde fluant theoremata. Primo autem liquet gravitatem corpusculi in æquatore Sphæroidis compressæ positi esse mediam proportionalem, gravitatem inter, quæ in superficie Sphæræ homogeneæ circumscriptæ est, & quæ exercetur in Polo sphæroidis oblongæ, eorumdem cum oblata illa semiaxium, prorsus, ut a Newtono assumptum est in prop. 19. lib. 3. Est enim gravitas in æquatore Sphæroidis $\frac{2n}{3}+\frac{2b}{5}$: In superficie Sphæræ circumscriptæ $\frac{2n}{3}+\frac{2b}{3}$: In Polo Sphæroidis oblongæ, eorumdem semiaxium cum oblata $\frac{2n}{3}+\frac{2b}{15}$. Huc redit formula a Cl. Daniele Bernoullio pro attractione hujus Sphæroidis exhibita in dit. de flu., & refl. maris, cap. 2. num. 6., ubi Sphæroidis densitas eadem ponatur cum densitate Sphæroidis alterius, ac Sphæræ, & pro peripheriarum ratione sumatur, prout ipsi in superioribus fecimus, radiorum ratio. Ita erit

$$\frac{2n}{3}+\frac{2b}{3} : \frac{2n}{3}+\frac{2b}{5} = \frac{2n}{3}+\frac{2b}{5} : \left(\frac{\frac{4}{9}n^2+\frac{8}{15}nb}{\frac{2n}{3}+\frac{2b}{3}} = \frac{\frac{2}{3}n^2+\frac{4}{5}nb}{n+b} = \frac{2n}{3}-\frac{2b}{3}+\frac{4b}{5} = \frac{2n}{3}+\frac{2b}{15}\right).$$

Id autem nescio quo fato Geometræ incomparabili exciderit. Certe allati principii demon-

ſtrationem aliquam allaturus, perperam ſequi illud ex eo dixit, „ quod ſphæra (*PAQB*, fig. 4. tab. 3.) diminuendo diametrum „ *PQ* in ratione 101 : 100 vertitur in figuram terræ, & hæc „ figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ „ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in „ dictam ſphæroidem, (oblongam ſcilicet) & gravitas in loco „ *A* in caſu utroque diminuitur in eadem ratione, quam pro- „ xime; ſeu, quod perinde eſt prorſus, ex eo quod, in hypotheſi ſphæroidum proxime accedentium ad Sphæram, gravitas in ſuperficie circumſcriptæ ſphæræ eſt ad gravitatem in æquatore ſphæroidis compreſſæ, & gravitas in æquatore ſphæroidis compreſſæ ad gravitatem in Polo ſphæroidis oblongæ jam deſcriptæ in proportione continua ſemiaxis majoris ſphæroidum ad minorem, ſive ut quantitas materiæ in ſingulis: Quemadmodum ex ea hypotheſi ſphæroidum proxime ad ſphæram accedentium deducere conati ſunt perſpicaciſſimi Newtonianæ philoſophiæ interpretes num. 80., nota 5. Id minus recte aſſumptum eſſe, vel ex eo Mathematico longe ingenioſiſſimo conſtare poterat, quod poſitis ſphæroidum ſemiaxibus inter ſe ut 101 : 100, & calculo ad normam principii illius, cujus veritatem ipſi demonſtravimus, ſcilicet, quod gravitas in æquatore ſphæroidis compreſſæ ſit media proportionalis inter gravitates in ſuperficie ſphæræ, & in Polo ſphæroidis oblongæ, calculo inquam ad normam principii illius inſtituto, prodierint gravitates in Sphæram, ſphæroidem compreſſam, & oblongam inter ſe, ut 126, $125\frac{1}{2}$, 125, in diverſa prorſus ratione, ac eſſent ſemiaxes ipſi, & quantitates materiæ, quas eorumdem ſemiaxium proportionem, ut ex Conicis notum eſt, ſequi, adeoque in Newtoniano caſu proportionem 101 : 100 continuare neceſſum eſt.

Aliam prorſus, quam ſemiaxium, & quantitatum materiæ rationem, gravitates illas continuare ex formulis ſuperioribus palam fit. Eſt enim gravitas in ſuperficie ſphæræ ad gravitatem in æquatore ſphæroidis compreſſæ, & inſcriptæ, ut

$\frac{2}{3}$

$$\frac{2n}{3}+\frac{2b}{3}:\frac{2n}{3}+\frac{2b}{5}=10n+10b:10n+6b=n+b:\frac{10n^2+16nb}{10n+10b}$$

$$=n+b:n+\frac{3}{5}b.$$ Quare erit gravitas ad gravitatem in minori ratione semiaxis majoris ad minorem. Simili modo est gravitas in æquatore illius sphæroidis ad gravitatem in Polo sphæroidis oblongæ, eorumdem semiaxium, ut

$$\frac{2n}{3}+\frac{2b}{5}:\frac{2n}{3}+\frac{2b}{15}=10n+6b:10n+2b=n+b:\frac{10n^2+12nb}{10n+6b}$$

$$=n+b:n+\frac{3}{5}b;$$ sive in minori pariter ratione semiaxis majoris ad minorem. Ergo eæ trium dictorum corporum attractiones, sunt utique in proportione continua, sed non in ea, quam semiaxis major, & minor continuant, seu quam habent quantitates materiæ, in singulis ex iis corporibus contentæ: Notum est enim quantitates materiæ in sphæra, & sphæroidibus inscriptis, compressa, & oblonga continuare eam proportionem semiaxis majoris ad minorem. Ita dum stabilitæ in 19. lib. 3. propositione terrestrium axium proportionis fulcimentum, & patrocinium quærimus, aliud in propositione eadem sophisma nobis se se offert, quod eorum, quæ in Principiis Mathematicis Newtoni nacta sunt hactenus, sextum est. Primum in 10. lib. 2. propositione deprehensum, atque alia plura, quæ exinde in sequentia corollaria, exemplaque, ac regulas irrepserant, Joannes Bernoullius per litteras magno Leibnitio aperuit, & publici juris fecit, tum in Monumentis Regiæ Parisiensis Scientiarum Academiæ, quum in celebri dissertatione de motu gravium, pendulorum, & projectilium, quæ in Actis Lipsiensibus edita est. Quadragesimam septimam ejusdem libri propositionem jam olim suspectam habuit Eulerus: In ea vitium aliquod excidisse Gabriel Cramer subtilissimis iis animadversionibus evicit, quas immortales viri Le Seur, & Jacquier, suis in Newtonianam Philosophiam Commentariis inseruerunt.

Paralogismo 36. libri ejusdem propositionem, qua fluidorum evase effluentium motum definire agressus est, laborare, & 51, ac 52, quibus vortices e cœlo eliminatos sibi aliquando plauserunt Newtoniani, Bernoullius jam laudatus ostendit in admirabili sua Hydraulica, & novis cogitationibus de Cartesiano systemate, quæ anno sæculi hujus 30. a Parisiensi Academia præmio donatæ sunt. Sophistice etiam in Coroll. prop. 36. lib. 3. determinatam esse altitudinem, ad quam aquæ in libero mari sub æquatore unica solari vi attolluntur, pedis unius, digitorum 11, cum $\frac{1}{30}$, cum non sit nisi 0.5072, subductis calculis eruit in sua inquisitione Physica in caussam fluxus, & refluxus maris Leonardus Eulerus, num. 38.

At vero calculos ipsi nostros prosequamur. Gravitas absoluta in superficie sphæræ alicujus, quæ radium habeat $r$, & densitatem eamdem cum densitate sphæroidis compressæ, sit nota, & vocetur $g$. Habebitur

$$\frac{2}{3}r : \frac{2}{3}n + \frac{8}{15}b = g : \frac{ng}{r} + \frac{4bg}{5r}.$$

Hæc erit gravitas absoluta in Polo sphæroidis. Pariter

$$\frac{2}{3}r : \frac{2}{3}n + \frac{2}{5}b = g : \frac{ng}{r} + \frac{3bg}{5r}.$$

Hæc erit gravitas in æquatore. Quia vero per Coroll. 3. prop. 101. lib. 1. Princ. Mathem. Newtoni, & per Coroll. 2. lem. 3. Cl. Mac-Laurini de flu., & refl. maris, attractiones in variis a sphæroidis centro distantiis, intra sphæroidem, sunt ut ipsæ distantiæ, si $PM$, fig. 5. tab. 3., dicatur $x$, & $MG\,y$, erit

$$n : x = \frac{ng}{r} + \frac{4bg}{5r} : \frac{gx}{r} + \frac{4bgx}{5rn}.$$

Hæc erit gravitas absoluta in loco $P$. Erit etiam

$$n + b : y = \frac{ng}{r} + \frac{3bg}{5r} : \left(\frac{ngy}{rn+rb} + \frac{3bgy}{5rn+5rb} = \frac{gy}{r} - \frac{2bgy}{5rn}\right).$$

Hæc erit gravitas in loco quolibet $G$.

Quo

Quo jam data erit gravitas abſoluta in quovis alio ſuperficiei loco $D$. Omnibus enim ut ſupra ſtantibus, ea gravitatis particulæ $D$ portio, quæ ſecundum $DP$ exercetur, æqualis eſt gravitati totali particulæ $G$, ſive $\frac{gy}{r} - \frac{2bgy}{5rn}$: Et quæ ſecundum $DG$ impenditur, æqualis eſt gravitati particulæ $P$, ſive $\frac{gx}{r} + \frac{4bgx}{5rn}$, vi lem. 4. Cl. Mac-Laurini. Erecta porro in $D$ normali $DQ$, & ad $R$ uſque continuata, ductaque recta $dp$, ipſi $DP$ infinite proxima, nec non dimiſſis ex $d$, $G$, $P$, perpendicularibus $dc$, $GO$, $PN$ in rectis $DP$, & $DR$, ac facta inſuper $VQ$ parallella ipſi $AL$, erit

$$Dc : Dd = DG : DQ$$

$$-dy : \surd(dy^2 + dx^2) = x : \frac{x}{-dy}\surd(dy^2 + dx^2).$$

Eſt vero $y = \left(\frac{n+b}{n}\right)\surd(n^2 - x^2)$

$$dy = \frac{-(n+b)\,x\,dx}{n\surd(n^2 - x^2)}$$

$$dy^2 = (n+2b)\,x^2\,dx^2 : \overline{n(n^2 - x^2)}$$

Adeoque $DQ = x\surd\left(\frac{dx^2 + \frac{(n+2b)\,x^2\,dx^2}{n(n^2 - x^2)}}{\frac{(n+b)\,x\,dx}{n\surd(n^2-x^2)}}\right) = \frac{n}{n+b}\surd\left(n^2 + \frac{2bx^2}{n}\right) =$

$$\frac{n}{n+b}\left(n + \frac{bx^2}{n^2}\right) = n - b + \frac{bx^2}{n^2}.$$

$GQ = \surd(DQ^2 - DG^2) = \surd\left(n^2 - 2nb + \frac{2bx^2}{n} - x^2\right) = \surd(n^2 - x^2) - \frac{nb + \frac{bx^2}{n}}{\surd(n^2 - x^2}$

$\surd(n^2$

$\surd(n^2 - x^2) - \frac{b}{n}\surd(n^2 - x^2)$.

$QM = GM - GQ = \frac{(n+b)}{n}\surd(n^2 - x^2) - \surd(n^2 - x^2) + \frac{b}{n}\surd(n^2 - x^2) =$

$\frac{2b}{n}\surd(n^2 - x^2)$. Erit etiam

$QG : QD = VD : QD = QM : QR$; unde

$$\surd(n^2 - x^2) - \frac{b}{n}\surd(n^2 - x^2) : n - b + \frac{bx^2}{n^2} = \frac{2b}{n}\surd(n^2 - x^2) : \frac{\frac{2nb - 2b^2}{n} + \frac{2b^2x^2}{n^3}}{1 - \frac{b}{n}},$$

& $QR = \frac{2nb - 2b^2}{n - b} + \frac{2b^2x^2}{n^3 - n^2b} = 2b$. Quæ est singularis compressæ, & proxime ad sphæram accedentis sphæroidis proprietas, quod ea normalis pars $QR$, quæ inter unum semiaxem $MH$, & alterum $ML$ interjicitur, constans sit, & æqualis duplæ semiaxium eorumdem differentiæ, seu differentiæ axium.

Habemus itaque $DR = n + b + \frac{bx^2}{n^2}$: Et propterea cum vis totalis particulæ $D$ secundum $DG$, seu $\frac{gx}{r} + \frac{4bgx}{5rn}$, sit ad eam sui portionem, quæ secundum $DR$ agit, ut $DG : DO$, sive $DQ : DG$; erit eadem portio $= \left(\frac{gx}{r} + \frac{4bgx}{5rn}\right)\left(\frac{x}{n - b + \frac{bx^2}{n^2}}\right) =$

$$\frac{5gn^3x^2 + 4bgnx^2}{5rn^3 - 5rbn^2 + 5rbx^2} = \frac{gx^2}{rn} + \frac{4bgx^2}{5rn^2} + \frac{gbx^2}{rn^2} - \frac{gbx^4}{rn^4} =$$

$$\frac{gx^2}{rn} + \frac{9bgx^2}{5rn^2} - \frac{gbx^4}{rn^4}.$$

Simi-

Similiter vis totalis secundum $DP$, seu $\frac{gy}{r} - \frac{2bgy}{5rn}$, est ad partem eam, quæ secundum $DR$ impenditur ut $DP . DN = DR : DP$. Erit ergo hæc pars =

$$\left(\frac{gy}{r} - \frac{2bgy}{5rn}\right)\left(\frac{y}{n+b+\frac{bx^2}{n^2}}\right) = \frac{5gn^2y^2 - 2bgny^2}{5rn^3+5rbn^2+5rbx^2};$$

sive (quia $y^2 = n^2 - x^2 + 2nb - \frac{2bx^2}{n}$), erit =

$$\frac{5gn^4 - 5gn^2x^2 + 10gbn^3 - 10gbnx^2 - 2bgn^3 + 2bgnx^2}{5rn^3 + 5rbn_2 + 5rbx^2} =$$

$$\frac{5gn^4 - 5gn^2x^2 + 8gbn^3 - 8gbnx^2}{5rn^3 + 5rbn^2 + 5rbx^2} =$$

$$\frac{gn}{r} - \frac{gx^2}{rn} + \frac{8gb}{5r} - \frac{8gbx^2}{5rn^2} - \frac{gb}{r} + \frac{gbx^2}{rn^2} + \frac{gbx^4}{rn_4} - \frac{gbx^2}{rn^2} =$$

$$\frac{gn}{r} + \frac{3bg}{5r} - \frac{gx^2}{rn} - \frac{8gbx^2}{5rn^2} + \frac{gbx^4}{rn^4}.$$

Quare ambas has vires simul jungendo, erit gravitas totalis particulæ $D$, secundum $DQ$ ad curvam perpendicularem =

$$\frac{gn}{r} + \frac{3bg}{5r} + \frac{bgx^2}{5rn^2}.$$

Si eadem formula in valore sinus latitudinis puncti $D$ desideretur, dicatur sinus ipse $S$, & sinus totus $T$. Erit

$$DG : DQ = S : T = x : n - b + \frac{bx^2}{n^2}$$

$$Sn - Sb + \frac{Sbx^2}{n^2} = Tx$$

$$Sbx^2 - Tn^2x = Sn^2b - Sn^3$$

$x^2$

$$x^2 - \frac{Tn^2x}{Sb} + \frac{T^2n^4}{4S^2b^2} = n^2 - \frac{n^3}{b} + \frac{T^2n^4}{4S^2b^2}$$

$$\pm x \mp \frac{Tn^2}{2Sb} = \mp\sqrt{\left(n^2 - \frac{n^3}{b} + \frac{T^2n^4}{4S^2b^2}\right)}$$

$$x = \frac{Tn^2}{2Sb} - \sqrt{\left(n^2 - \frac{n^3}{b} + \frac{T^2n^4}{4S^2b^2}\right)}$$

$$x^2 = \frac{T^2n^4}{4S^2b^2} - \frac{Tn^2}{Sb}\sqrt{\left(n^2 - \frac{n^3}{b} + \frac{T^2n^4}{4S^2b^2}\right)} + n^2 - \frac{n^3}{b} + \frac{T^2n^2}{4S^2b^2}.$$

Extrahatur jam ex fecundo homogenei comparationis termino fua radix: Erit in Newtoniana ferie

$$P^m = \frac{Tn^2}{2Sb} = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{\frac{Tn^2}{4Sb}\left(n^2 - \frac{n^3}{b}\right)}{\frac{T^2n^4}{4S^2b^2}} = \frac{Sb - Sn}{T} = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{Sb-Sn}{T}\right)\left(n^2 - \frac{n^3}{b}\right)}{\frac{T^2n^4}{4S^2b^2}} = \frac{2S^3b^2}{T^3n} - \frac{S^3b}{T^3} = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2S^3b^2}{T^3n} - \frac{S^3b}{T^3}\right)\left(n^2 - \frac{n^3}{b}\right)}{\frac{T^2n^4}{4S^4b^2}} = -\frac{2S^5b^2:}{T^5n}$$

Unde hic feriem abrumpendo habebitur

$$\sqrt{\left(n^2 - \frac{n^3}{b} + \frac{T^2n^4}{4S^2b^2}\right)} = \frac{Tn^2}{2Sb} + \frac{Sb}{T} - \frac{Sn}{T} + \frac{2S^3b^2}{T^3n} - \frac{S^3b}{T^3} - \frac{2S^5b^2}{T^5n},$$

$-Tn^2$

$$-\frac{Tn^2\sqrt{}}{Sb}\left(n^2-\frac{n^3}{b}+\frac{T^2n^4}{4S^2b^2}\right)=-\frac{T^2n^4}{2S^2b^2}-n^2+\frac{n^3}{b}-\frac{2S^2bn}{T^2}+\frac{S^2n^2}{T^2}+\frac{2S^4bn}{T^4}:$$

Et æquationem ordinando, tollendoque terminos se mutuo destruentes, erit $x^2=\frac{S^2n^2}{T^2}-\frac{2S^2bn}{T^2}+\frac{2S^4bn}{T^4}$.

Substituatur in superiori æquatione hic valor ipsius $x^2$, &, evanescentibus omnibus rejectis, pro totali gravitate, in loco quovis Sphæroidis $D$ prodibit $\frac{gn}{r}+\frac{3bg}{5r}+\frac{bgS^2}{5rT^2}$. Erat autem gravitas totalis sub æquatore $\frac{gn}{r}+\frac{3bg}{5r}$: Itaque gravitatis ipsius incrementa pergendo ab æquatore ad Polos, erunt quadratis applicatarum axi majori, & quadratis sinuum rectorum latitudinum proportionalia.

Si sphæra, in cujus superficie gravitas nota hic supponitur, & $=g$, eamdem habeat cum sphæroide soliditatem, vi eorum, quæ in cap. 4. dicta sunt, habebitur $r=n+\frac{2}{3}b$: Quo valore in superioribus formulis substituto, gravitas in æquatore evadet $g-\frac{bg}{15n}$, minor scilicet, quam in superficie sphæræ illius; in Polo $g+\frac{2bg}{15n}$, scilicet major. In alio quovis sphæroidis loco $D$, erit $g-\frac{bg}{15n}+\frac{bgS^2}{5nT^2}$. Locus, in quo eadem sit sphæroidis totius attractio, & attractio sphæræ æqualis cum sphæroide ipsa soliditatis, facili negotio determinabitur, si fiat.

$$g-\frac{bg}{15n}+\frac{bgS^2}{5nT^2}=g$$

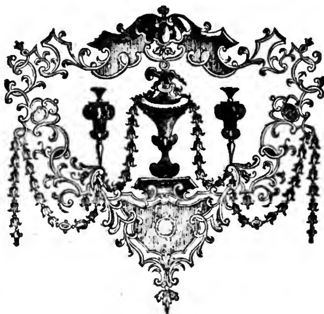
$$\frac{bgS^2}{5nT^2}=\frac{bg}{15n}$$

$3bgS^2 = bgT^2$

$T^2 : S^2 = 3 : 1$

$T : S = \sqrt{3} : 1 = 1.732 : 1 = 100000 : 57736.72,$

qui eſt ſinus 35° 16′. At vero in hac ipſa latitudine, ut in 4. cap. dictum eſt, ſphæra, & ſphærois ejuſdem ſoliditatis ſe interſecant: In communi igitur interſectione, & ſphærois, & ſphæra æquales attractrices vires exercent.



CA-

## CAPUT SEPTIMUM.

### *De Figura Terræ*.

AB hiſce calculis demum, atque attractionibus homogenearum ſphæroidum perquirendis, definiendiſque expediti, redeamus unde ſumus digreſſi. Corpuſculi cujuſcumque in $R$ poſiti pondus, fig. 6. tab. 3., facta hypoteſi, quod gravitas eadem maneat in $R$, quæ antea erat in ſuperficie ſphæræ, cujus formam fluidum primo præſeferebat, in cap. 4. ſtatutum eſt $g - c$. Cum ergo ibidem gravitas ex modo dictis ſit $= \frac{ng}{r} + \frac{3bg}{5r}$, ſive (ſubſtituendo vi cap. ejuſdem quarti $r - \frac{2cr}{3g}$ pro $n$, & $\frac{cr}{g}$ pro $b$) $= g - \frac{c}{15}$; erit pondus abſolutum in $R = g - \frac{16c}{15}$. Simili modo quia gravitas in loco $V$ eſt $= \frac{ng}{r} + \frac{3bg}{5r} + \frac{bgx^2}{5rn^2}$, iiſdem ac ſupra factis ſubſtitutionibus, prodibit ibidem pondus $= g - \frac{16c}{15} + \frac{6cx^2}{5r^2}$. In Polo $E$ evadet $= g + \frac{2c}{15}$.

Quo patet æqualium corpuſculorum in $R$, $V$, & $E$ poſitorum pondera non eſſe diſtantiis ipſis a centro $RO$, $VO$, & $EO$ reciproce proportionalia: Hoc eſt æquilibrium totius fluidi per novam hanc ponderum alterationem, ex inæqualitate attractionum Sphæræ, & Sphæroidis ortam, fuiſſe denuo ſublatum. Ad ipſum quantocyus reſtituendum, fluidum circa, æquatorem, ubi levius redditum eſt, aſcendet, & circa Polos, ubi gravius, deprimetur, atque ex locis $R$, $V$, $E$ in loca $F$, $N$, $C$ abibit, diſtantiaſque a centro $FO$, $NO$, $CO$ acquiret pon-

deribus ipsis in $R$, $V$, & $E$ reciproce proportionales. Quare si $CO$ vocetur $a$, habebitur

$$g - \frac{16c}{15} : g + \frac{2c}{15} = a : FO = \frac{ag + \frac{2ac}{15}}{g - \frac{16c}{15}} = a + \frac{2ac}{15g} + \frac{16ac}{15g} = a + \frac{6ac}{5g}.$$

Simili ratione erit

$$g - \frac{16c}{15} + \frac{6cx^2}{5r^2} : g + \frac{2c}{15} = a : NO = \frac{ag + \frac{2ac}{15}}{g - \frac{16c}{15} + \frac{6cx^2}{5r^2}} = a + \frac{6ac}{5g} - \frac{6acx^2}{5gr^2}.$$

Erit ergo $FO - NO = \frac{6acx^2}{5gr^2}$: Hoc est differentia altitudinum supra centrum in æquatore, & alio quolibet loco $N$ proportionalis erit quadratis applicatarum $VL$ axi majori $RD$ sphæroidis $ERAD$, in quam fluidum totum antea impresso circulari motu abierat, ut dictum est.

Jam vero ex Conicis est $VO = n + b - \frac{bx^2}{n^2} =$

$r - \frac{2cr}{3g} + \frac{cr}{g} - \frac{cx^2}{gr} = r + \frac{cr}{3g} - \frac{cx^2}{gr}$, substitutionibus ad normam superius dictorum factis: Unde quia

$OV : VL = ON : NP$, erit

$$r + \frac{cr}{3g} - \frac{cx^2}{gr} : x = a + \frac{6ac}{5g} - \frac{6acx^2}{5gr^2} : \frac{ax + \frac{6acx}{5g} - \frac{6acx^3}{5gr^2}}{r + \frac{cr}{3g} - \frac{cx^2}{gr}} =$$

$$\frac{ax}{r} + \frac{6acx}{5gr} - \frac{6acx^3}{5gr^3} - \frac{acx}{3gr} + \frac{acx^3}{gr^3} =$$

$ax$

$$\frac{ax}{r} + \frac{13acx}{15gr} - \frac{acx^3}{5gr^3} = NP.$$

$$\frac{a^2x^2}{r^2} + \frac{26a^2cx^2}{15gr^2} - \frac{2a^2cx^4}{5gr^4} = NP^2$$

$$x^2 + \frac{26cx^2}{15g} - \frac{2cx^4}{5gr^2} = \frac{r^2}{a^2}.NP^2$$

$$\frac{6acx^2}{5gr^2} = \frac{6c.NP^2}{5ga}:$$

Propterea differentia altitudinum supra centrum in æquatore, & alio quolibet loco *N* novæ fluidi nostri Figuræ, erit etiam proportionalis quadratis applicatarum *NP* axi majori Figuræ ejusdem.

His positis demonstrari facili negotio poterit hanc ipsam Figuram pariter, Sphæroidem oblatam esse, revolutione Ellipseos Apollonianæ genitam. Exhibeat *QHPL*, fig. 7. tab. 3., fluidi totius sectionem, per Polos *Q*, & *P* factam, ipsique circumscribatur circulus *MHNL*: Tum assumpto ad libitum quolibet puncto *C*, ducantur *ACG*, *BCF*, & jungatur *GF*. Erit differentia ponderum in locis *H*, & *C*, seu altitudinum *HD*, *CD* supra centrum differentia *BC*, ut $CO^2$. Sunt vero æquales inter se verticales anguli *BCA*, *GCF*, & anguli *GAB*, *BFG*, ob maximam figuræ nostræ, & sphæræ affinitatem, eidem arcui insistentes, angulo *BDH*, ad centrum *D* constituto, & arcui *BH*, dimidio proxime ipsius *BG* insistenti; æquales sunt: Ideft similia sunt inter se triangula *BCA*, *DOC*, *FGC*, adeoque

$$CB : CA = CO : CD = OG : DF.$$

Erit ergo *CA* ut $\frac{CB.CD}{CO}$, sive (substituendo pro *CB* ipsi proportionale $CO^2$) ut $CO.CD$: Et rursus, pro *CD* substituendo ipsi æquale $\frac{CO.DF}{OG}$, vel $\frac{CO.DB}{OA}$, erit *CA* ut $\frac{DB.CO^2}{OA}$,

aut

aut ſimpliciter ut $\frac{CO^2}{OA}$, ob ubique conſtantem $DB$. Quapropter erit $CO^2$ ut $CA.OA$, vel ut $CA.(CO+CA)$, ſive $CA \cdot CO$, negligendo evaneſcentem $CA^2$: Et dividendo erit $CO$ ut $CA$, tum componendo $CO$ ut $OA$, ideſt ut $\surd HO.OL$, quæ eſt natura Ellipſis Conicæ, & Apollonianæ.

Neque vero exiſtimandum propterea eſt fluidum totum in nova hac ſphæroide ultimo æquilibrari. Gravitas in ipſius æquatore aliquanto erit minor, & major in polis, quam in æquatore, & polis ſphæroidis prioris, unde adhuc circa polos deprimetur, & elevabitur circa æquatorem. Mutatio tamen omnis multo erit minor, quam quæ obtigit, quando ex prima ſphæroide in ſecundam hanc fluidum tranſiit ob multo minorem differentiam gravitatum in ſuperficie duarum ſphæroidum, quam in ſuperficie primæ ſphæroidis, & ſphæræ: Et quia in ſecunda eadem ſphæroide ponderum incrementa pergendo ab æquatore ad polos, proportionalia ſunt quadratis applicatarum axi majori, ſimili ac ſupra modo demonſtrari poterit, ob novam ponderum eorumdem alterationem, non niſi in tertiam ſphæroidem fluidum abire poſſe, & inde in quartam &c., ſucceſſivis mutationibus omnibus minoribus ſemper, ac minoribus evadentibus, quouſque ad mutationem quacumque data minorem deveniatur, atque ultimo fluidum ipſum retenta ſphæroidis forma æquilibretur, & quieſcat.

En quod ſine demonſtratione a Newtono prop. 19., & 20. lib. 3. Princip. Mathem. aſſumptum fuit, Tellurem noſtram in hypotheſi motus diurni, & gravitatis agentis in duplicata ratione diſtantiarum a particulis ſingulis reciproce, Sphæroidem compreſſam eſſe. Axium terreſtrium proportio, diverſimode elici ex formulis ſuperioribus poſſet. Hic tamen perſpicuitati ſimul, & compendio ſtudentes, non aliud iter tenebimus, quam, quo in jam citata propoſitione Newtonus eamdem terreſtrium axium proportionem obtinuit. Longitudo penduli ſimplicis uno ſecundo minuto temporis ſub æquatore oſcillationes ſuas abſolventis, a nobis ſupra ex Bouguerii, & Richerii obſervationibus ſtatuta eſt lin. 439. 36: Quare, quum per prop. 26. Ho-

Horol. Oscill. Cl. Huygens, sit circuli peripheria ad diametrum, ut unum secundum temporis ad tempus descensus liberi, & verticalis per dimidiam longitudinem jam dicti penduli, lineas scilicet 219. 68: Et per theor. 2. dial. 3. de motu incomparabilis Galilæi quadrata temporum sint ut spatia descensu verticali iis temporibus percursa: Erit quadratum diametri ad quadratum peripheriæ, sive 1 : 9. 8696, ut lin. 219. 68 ad lin. 2168. 153, spatium a gravi sub æquatore in libero aëre cadente uno secundo peragratum: Et Newtoniano more addendo unam undecimam millesimam, sive lin. 0. 197, ob aëris resistentiam, erit spatium eodem tempore in vacuo percursum lin. 2168. 35. At per ea, quæ in sequenti capite, num. 6., independenter ab his omnibus ipsi ostendemus, in Sphæroide quavis proxime ad sphæram accedente, Meridiani gradus circa quinquagesimum quartum latitudinis gradum, gradui æquatoris æquatur: Itaque si Meridiani gradum in ea latitudine assumamus, qualis in latitudine circiter 53° Nervoodo prodiit, hexapedarum Parisiensium 57300 (neque enim eæ, quas postmodum accuratioribus calculis determinabimus æquatoris terrestris, & illius gradus mensuræ capitis hujus calculos sensibiliter variare possunt); assumi poterit æquatoris totius ambitus hex. 20628000, seu pedum 123768000, & diameter pedum 39397739. Quod si ponamus terram circa centrum horis 23. 56.' 4", seu 86164" uniformiter revolvi, erit arcus a puncto quovis æquatoris 1" percursus, pedum 1436. 42, cujus quadratum 2063302. 4164, per diametrum 39397739 divisum, dabit pro sinu verso ejusdem arcus, pedes 0. 0523, seu lineas proxime 7. 53: Qui quia puncti ipsius æquatoris vim centrifugam, ex vertiginis motu ortam, exprimit, ut notum est, erit pondus corporum sub æquatore terrestri existentium ad vim centrifugam, ut 2168. 35 : 7. 53, & gravitas totalis erit ad vim eamdem centrifugam, ut 2175. 88 : 7. 53, sive ut 289 : 1 fere.

At quoniam, per ea, quæ ultimo in superiori capite dicta sunt, gravitas sub æquatore ejusdem sphæroidis est $= g - \frac{bg}{15n}$,

sub

sub polis vero $= g + \frac{2bg}{15n}$, & pergendo directe a superficie ad centrum decrescit in simplici distantiarum ratione: Si duo sub æquatore, & polis crura, transversis, & æquidistantibus superficiebus distinguantur cum Newtono in partes, totis proportionales, erunt pondera partium singularum sub æquatore ad pondera partium totidem sub polis, ut magnitudines, & gravitates acceleratrices conjunctim, idest, ut

$n + b : n$, & $g - \frac{bg}{15n} : g + \frac{2bg}{15n}$, sive ut

$ng + \frac{14bg}{15} : ng + \frac{2bg}{15}$:

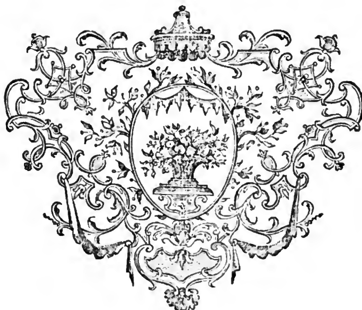
Et propterea si fiat $n = 100$, $b = 1$, erunt gravitates acceleratrices sub æquatore, & polis inter se, ut $500 : 501$, pondera vero ut $505 : 501$.

Porro ex eadem formula evidens fit, quod assumpsit Newtonus, in sphæroidibus diversis, & homogeneis interse, excessus majorum crurum supra minora proportionales esse excessibus majorum ponderum supra minora. Est enim differentia ponderum $= \frac{12bg}{15} = \frac{4bg}{5}$, in sphæroide, cujus semiaxis minor sit $n$, major vero $n + b$: Et propterea differentia eadem in sphæroide altera, quæ priorem soliditate exæquet, & semiaxem minorem habeat $N$, majorem $N + b$, erit $\frac{4Bg}{5}$, & differentia prior ad posteriorem hanc erit, ut

$\frac{4bg}{5} : \frac{4Bg}{5} = b : B$, scilicet ut differentia semiaxium primæ sphæroidis ad differentiam semiaxium sphæroidis alterius. Ita demum, quia vis centrifuga sub æquatore Telluris nostræ, ex gravitate detracta, eos ponderum excessus, ut optime Newtoni

toni interpretes animadvertunt in Comment. ejusdem propos. not. z, accurate compensant, habebimus analogiam,

$\frac{4}{505} : \frac{1}{289} = \frac{1}{100} : \frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$, & axis terræ ad diametrum sibi normalem erit, ut 229 : 230.



## CAPUT OCTAVUM.

### *De gradibus Meridiani, & Parallellorum.*

DEterminata telluris nostræ Figura, & terrestrium axium proportione, facili calculo exhiberi poterunt omnes Meridiani cujuslibet, & circulorum æquatori parallellorum gradus. Retineatur, quod centies jam dictum est, sphæroidem hanc, cujus formam præsefert tellus, & sub polis compressam esse, & ad sphæram proxime accedere, & propterea quadraticas quaslibet, & plusquam quadraticas differentiæ semiaxium potestates, utpote præ aliis terminis, ob parvitatem evanescentes negligi, & posse, & debere. Exhibeat etiam $QHPL$, fig. 8. tab. 3., Meridiani terrestris sectionem, plano, per polos transeunte, factam, & ponatur $PD = n$, $HD - PD = b$, $RD = x$, $RC = y$: Erit $CN$ ad curvam in puncto $C$ perpendicularis $= n - b + \frac{bx^2}{n^2}$. Ex Conicis porro radius osculi in $C$ est

$$\frac{CN^3 . DH^2}{DP^4} = \left(n - b + \frac{bx^2}{n^2}\right)^3 . \frac{(n+b)^2}{n^4} = (n^3 - 3n^2 b + 3bx^2) . \frac{(n+2b)}{n^3} = n - b + \frac{3bx^2}{n^2}:$$

Propterea, quia sub æquatore, ubi $x = 0$, radius osculi fit $= n - b$, inde ad polos pergendo augebitur in duplicata ratione applicatarum axi majori terræ. Quod si eadem formula desideretur in valore sinus recti latitudinis, dicatur sinus ipse $S$, sinus Totus $T$: Erit vi jam dictorum

$$x^2 = \frac{S^2 n^2}{T^2} - \frac{2S^2 bn}{T^2} + \frac{2S^4 bn}{T^4}, \ \&$$

$$n - b + \frac{3bx^2}{n^2} = n - b + \frac{3bS_2}{T^2}:$$

Unde

Unde adhuc, pergendo ab æquatore ad polos, radius osculi, incrementa accipiet quadratis sinuum rectorum latitudinum proportionalia. Jam vero in diversis latitudinibus gradus integri sunt ut minimi arcus similes, & arcus iidem minimi, ut radii circulorum curvam osculantium: Itaque Meridiani terrestris gradus recedendo ab æquatore polos versus, augebuntur in duplicata ratione applicatarum majoris axis, aut sinuum rectorum latitudinum.

Exinde ad complura theoremata adytus patet. Liquet primo Meridiani terrestris gradus circa æquatorem breviores esse, & longiores circa polos, gradibus sphæræ, ejusdem soliditatis cum terra nostra, & quæ esset terræ ipsius figura, ubi circularis motus ipsi primo impressus non fuisset. Latitudo, in qua gradus Meridiani terrestris, & sphæræ illius æquales sunt, facile determinabitur. Quia enim, per cap. 4., radius sphæræ est $n + \frac{2b}{3}$, & ubi gradus æquantur, etiam osculatores radii æquales sunt, habebitur

$$n + \frac{2b}{3} = n - b + \frac{3bS^2}{T^2}$$

$$5bT^2 = 9bS^2$$

$$T^2 : S^2 = 9 : 5$$

$$T : S = 3 : \sqrt{5} = 3 : 2.236 = 100000 : 74533 \cdot 33,$$

qui est sinus 48° 11′. Quæcumque igitur sit axium in sphæroide aliqua proportio, dummodo ipsa proxime ad Sphæram accedat, meridiani gradus in latitudine 48° 11′, iidem erunt, ac in sphæra ejusdem soliditatis.

2. Universaliter etiam, si fiat $S = T$, tum vero $S = 0$, radius Meridianum sphæroidis in polis osculans prodibit $= n + 2b$, radius ipsum osculans sub æquatore $= n - b$. Itaque, quia semiaxis minor sphæroidis positus fuit $= n$, major $= n + b$, quævis sit demum ipsorum proportio, semper in facto casu radius Meridianum sub æquatore osculans $n - b$, semiaxis minor $n$, major $n + b$, & radius Meridianum osculans sub polis $n + 2b$,

 erunt

erunt Arithmetice proportionales. Idem ex aliis principiis theorema ingeniosissime derivavit Cl. Bouguer sect. 6. §. 16.

3. Si primi, & æquatorem intersecantis, Meridiani gradus mensura sit data, & vocetur $g$, tum fiat

$$n-b:n+2b=g:\left(\frac{ng+2bg}{n-b}=g+\frac{3bg}{n}\right),$$

habebitur mensura ultimi, & per polos transeuntis meridiani gradus. Differentia ultimi, & primi illius gradus erit $\frac{3bg}{n}$, quarta scilicet proportionalis ad semiaxem minorem; differentiam ipsius, & majoris, ac triplum gradus æquatorem intersecantis: Atque id pariter quæcumque sit semiaxium eorumdem proportio. Ubi hæc proportio determinetur 229 : 230, quemadmodum in antecedenti capite pro terra nostra determinata est, & primus Meridiani gradus cum D. D. Goudin, Bouguer, & de la Condamine ponatur hexapedarum Parisiensium 56753, differentia ejusdem gradus, & alterius per polos transeuntis erit hex. 743, & ipse hic gradus hex. 57496.

4. Gradus in aliis quibusvis latitudinibus, ex data differentia primi, & ultimi, ac proportione differentiæ primi, & alterius cujuslibet, haud difficilius dabuntur. Ex. gr. quæratur mensura gradus unius in lat. 66° 20'. Sinus rectus 66° 20' est 91589.63, quadratum ejus 8388660323.5369, ubi sinus totus ponatur 100000. Fiat jam

$$10000000000:8388660323.5369=743:623:$$

Hæc erit differentia graduum meridiani terrestris sub æquatore, & in lat. 66° 20' constitutorum; integer vero gradus in hac latitudine erit hex. 57376. Simili calculo differentia primi illius meridiani terrestris gradus, & graduum aliorum in latit. 53°, 49° 22', & 45° existentium erit hex. 473, 428, 371, & gradus iidem toti hex. 57226, 57181, 57124. Si gradus meridiani sub æquatore cum D. D. Iuan, & Ulloa, absque alia reductione ad libellam maris, & caloris correctione, ponatur hex. 56767, eadem ferme erit gradus ipsius, ac alterius

terius polos fecantis differentia. Gradus in latitudine 66° 20′ erit hex. 57390, in lat. 53° hex. 57240, in lat. 49° 22′ hex. 57195, in lat. 45° hex. 57138: Quamvis Hispani incomparabiles gradus unius mensuras, in Lapponia hex. 57437. 9, & 57050 in Galliis minus accurate assumentes, easdemque comparantes cum propriis, terrestrium axium proportionem a Newtoniana aliam stabilierint 266 : 265. Sed de Newtonianæ theoriæ, & observationum consensu postmodum.

5. Et quoniam radius æquatorem osculans, est æquatoris ipsius semidiameter $n + b$, iisdem, ac supra, retentis, erit

$$n - b : n + b = g : g + \frac{2bg}{n} :$$

Hoc est differentia illius Meridiani gradus, qui æquatorem intersecat, & gradus ejusdem æquatoris, erit quarta proportionalis ad semiaxem minorem, differentiam ipsius, & majoris, ac duplum gradus Meridiani æquatorem secantis. Numeris in specierum locum subrogatis, retentisque Gallorum mensuris, & proportione terrestrium axium in superiori capite stabilita, habebitur æquatoris terrestris gradus hex. 57248. Accuratior ergo, quam supra, ad obtinendam gravitatis, & vis centrifugæ proportionem, determinavimus, æquatoris totius ambitus erit hex. Parif. 20609280, & æquatoris semidiameter erit hex. 3280166. Quod si fiat

$$230 : 229 = 3280166 : 3265904 :$$

Tot hexapedis semiaxis minor telluris nostræ constabit. Differentia semiaxis, & semidiametri, semiaxi eidem perpendicularis, erit hex. 14262, seu pedum 85572, pedibus 100 major, quam ex aliis mensuris Newtonus definierat.

6. Universim in Sphæroidibus quibuscumque ad Sphæram proxime accedentibus Meridiani gradus in lat. 54° 44′, æquales erunt gradui æquatoris. Ubi enim fiat

$$g + \frac{2bg}{n} = g + \frac{3bgS^2}{nT^2}, \text{ habebitur}$$

$$2T^2 = 3S^2$$

$$T^2 : S^2 = 3 : 2$$

$T : S = \sqrt{3} : \sqrt{2} = 1.732 : 1.414 = 100000 : 81639$, qui est sinus 54° 44'. Idipsum alia via assecutus est Cl. Bouguer sect. 6. §. 13.

7. Circulorum omnium æquatori parallellorum gradus, ex dato æquatoris gradu, semiaxium terrestrium proportione, & sinibus latitudinum dabuntur. Dicatur ipse æquatoris gradus $G$, parallelli radius $y$: Quia

$$n + b : y = G : \frac{Gy}{n+b},$$

erit ipse parallelli gradus $= \frac{Gy}{n+b}$. Substituatur jam pro $y$ ipsius valor $\left(\frac{n+b}{n}\right)\sqrt{(n^2 - x^2)}$, erit gradus idem $=$

$\frac{G}{n}\sqrt{(n^2 - x^2)}$. At vero in capite nostro 6 erat

$$n^2 = \frac{S^2 n^2}{T^2} - \frac{2S^2 bn}{T^2} + \frac{2S^4 bn}{T^4}:$$

Itaque hoc rursus valore substituto, erit parallelli gradus $=$

$$\frac{G}{n}\sqrt{\left(n^2 - \frac{S^2 n^2}{T^2} + \frac{2S^2 bn}{T^2} - \frac{2S^4 bn}{T^4}\right)}$$

$$\frac{G}{T^2 n}\sqrt{(T^4 n^2 - T^2 S^2 n^2 + 2T^2 S^2 bn - 2S^4 bn)}.$$

Ad extrahendam radicem, in Newtoniana serie ponendum erit

$$P^m = Tn\sqrt{(T^2 - S^2)} = A$$

$$\frac{m}{1} AQ = \frac{T^2 S^2 b - S^4 b}{T\sqrt{(T^2 - S^2)}} = \frac{S^2 b}{T}\sqrt{(T^2 - S^2)}:$$

Quo jam, reliquis terminis, utpote altiori semper ipsius $b$ potestate affectis, ob parvitatem evanescentibus, evadet parallelli gradus $= \frac{G}{T}\sqrt{(T^2 - S^2)} + \frac{S^2 bG}{T^3 n}\sqrt{(T^2 - S^2)} =$

$$\left(G + \frac{S^2 bG}{T^2 n}\right)\frac{\sqrt{(T^2 - S^2)}}{T}.$$

8. Hinc,

8. Hinc, quum gradus in Sphæra Sphæroidi noſtræ circumſcripta ſint $= \frac{G . \sqrt{(T^2 - S^2)}}{T}$, patet, quod mirum fortaſſe prima fronte videri poteſt, gradum parallelli in Sphæroide, parallelli gradum, in Sphæra circumſcripta eamdem habentis latitudinem excedere quantitate
$\frac{S^2 b G \sqrt{(T^2 - S^2)}}{T^3 n}$. Quod ſi vero ipſa parallelli latitudo determinata ſit, ad gradus menſuram determinandam, alio opus non erit, quam ut in ſpecierum locum numeri ſubrogentur. Ita parallelli gradus in lat. 43° 32′, erit =

$$\left(57248 + \frac{57248\,(4744129291 \,.\, 9696)}{229000000000\,0}\right)\left(\frac{72497 \cdot 38}{100000}\right) = 41588,$$

ſcilicet 30 hex. minor, quam accuratiſſimis Caſſini, & de la Caille obſervationibus deprehenſus fuerit.

Simili modo alii omnes parallellorum, & meridiani gradus poterunt definiri. Aliquorum tabulam hic apponimus. Cæteros etiam, qui voluerit, facili negotio, inſtituto ad normam ſuperiorum calculo, inveniet.

Lati-

| Latitudo loci. | Meridiani gradus. | Parallellorum gradus. |
| --- | --- | --- |
| 0. | 56753. | 57248. |
| 15.° | 56802. | 55312. |
| 30.° | 56933. | 49630. |
| 45.° | 57124. | 40574. |
| 60.° | 57310. | 28717. |
| 75.° | 57446. | 14876. |
| 90.° | 57496. | 0. |

Ad integrum Meridiani ambitum obtinendum; a vertice majoris axis $2a + 2b$ Ellipſeos noſtræ, proxime ad circulum accedentis, ſupputentur abſciſſæ $x$. Erit elementum ſemiordinatæ $dy =$

$a^2 dx$

$$\frac{a^2dx+abdx-axdx}{(a+b)\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}} \quad \frac{-axdx}{(a+b)\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}}$$

$$dy^2 = \frac{a^2dx^2}{(2ax+2bx-x^2)} \quad \frac{-2a^2xdx^2}{(a+b)(2ax+2bx-x^2)} \quad \frac{+a^2x^2dx^2}{(a^2+2ab)(2ax+2bx-x^2)} =$$

$$\frac{a^2dx^2}{(2ax+2bx-x^2)} \quad \frac{-a^2dx^2}{a^2+2ab} :$$

Unde elementum perimetri $\sqrt{(dx^2+dy^2)} =$

$$dx\sqrt{\left(1 \quad \frac{+a^2}{2ax+2bx-x^2} \quad \frac{-a^2}{a^2+2ab}\right)} =$$

$$dx\sqrt{\left(\frac{a^2}{2ax+2bx-x^2} \quad +\frac{2b}{a}\right)} =$$

$$\frac{adx}{\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}} \quad + \frac{bdx\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}}{a^2}$$

Et totus ipſe perimeter erit =

$$a\frac{Sdx}{\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}} \quad + \frac{b}{a^2} Sdx\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}.$$

Jam vero peripheria circuli, Ellipſi noſtræ circumſcripti eſt = $(a+b)\frac{Sdx}{\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}}$ : Unde, quia circulorum peripheriæ ſunt ut radii, erit

$a\frac{Sdx}{\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}}$ peripheria circuli, qui Ellipſi inſcribitur, & cujus radius eſt $= a$. Eſt etiam area circuli ejuſdem circumſcripti $= Sdx\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}$, & ſub aliis formulis peripheria $= \frac{2}{a+b} Sdx\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}$: Propterea ſimili modo, quia peripheria hujus circuli eſt ad peripheriam circuli, cujus radius $= \frac{1}{2}b$, ut $a+b : \frac{1}{2}b$, erit $\frac{b}{(a+b)^2} Sdx\sqrt{(2ax+2bx-x^2)}$,

 ſeu,

seu, neglectis de more terminis ob parvitatem evanescentibus, $\frac{b}{a^2} S dx \sqrt{(2ax + 2bx - x^2)}$ peripheria circuli radium habentis $= \frac{1}{2} b$. Est ergo Ellipseos nostræ perimeter summa peripheriarum duorum circulorum, quorum unus radium habeat $= a$, alter $= \frac{1}{2} b$: Æqualis scilicet peripheriæ circuli, cujus radius $= a + \frac{1}{2} b$. Numeris in specierum locum subrogatis, erit $a + \frac{1}{2} b =$ 3273035 hex. Parif., & posita radii ad peripheriam proportione, eadem, quæ est 5000 ad 31415, prodibit ambitus totius terrestris meridiani hex. 20564478. 905.

Non absimili calculo invenientur, superficies sphæroidis revolutione ejusdem Ellipseos circa axem minorem genitæ $\frac{2pa^2}{r} + \frac{8pba}{3r}$, soliditas $\frac{2pa^3}{3r} + \frac{4pba^2}{3r}$: Æquales scilicet respective superficiei, & soliditati sphæræ, cujus radius sit $= a + \frac{2}{3} b$. Quare substitutionibus rite factis habebitur superficies terræ hexapedarum Parisiensium quadratarum 13496473342183. 104: Soliditas cubicarum hexapedarum 14735503580888881679. 616.



CA-

## CAPUT NONUM.

*De Loxodromiis Nautarum, de Parallaxi Lunæ, & aliis ex eadem theoria pendentibus.*

QUod si a Meridiano, & a circulis Æquatori terrestri parallellis ad curvas alias sit progrediendum, quas naves in telluris superficie constanti rhombo delatæ, Meridianos omnes eodem semper angulo intersecando describunt, quæque Loxodromiarum nomen apud Nauticæ scriptores habent, haud difficilius ex hac ipsa Sphæroidis, cujus formam præsefert tellus, cum Sphæra affinitate, problemati poterit satisfieri. Primo autem si ex data latitudinum mutatione, & angulo Loxodromico, Loxodromia, seu semitæ a navi percursæ longitudo inquiratur, verbo exhiberi ipsa poterit, quamcumque figuram habeat tellus nostra, dummodo rotunda eadem, & ex revolutione curvæ alicujus circa axem genita concipi possit. Sit $QHPLG$, fig. 9. t. b. 3., terræ ipsius sectio, plano aliquo per Polos $Q$, & $P$ transeunte facta, sit $HG$ æquator, $PQ$ axis, $PC$, $Pc$ duo infinite interse proximi Meridiani, $LM$, $lm$ duo parallelli, & navis solvat ex $A$, angulumque cum Meridiano $ARn$ constantem faciat. Patet, quod, quia angulus $arR$, sub quo Meridianus, & parallellum intersecantur, est rectus, Sinus Totus erit ad secantem anguli $raR$, sive $NaA$, ut $ar:aR$, sive ut elementum Meridiani portionis $aN$, ad elementum semitæ a navi percursæ $Aa$. Quæ ratio, quia constans est, ad fluentes revocando erit pariter Sinus ipse Totus ad secantem anguli Loxodromici, ut Meridiani portio $aN$, qui duobus parallellis $TB$, & $LM$ interjicitur, ac mutationem latitudinis exhibet ad longitudinem Loxodromiæ. Quare cum proportione ea ad tellurem sphæroidicam applicari possunt, quæ dedit Jacobus Bernoullius Magni Joannis Frater in Actis Lipsiensibus mense Junio anni 1691. pro Sphærica telluris forma: Siquidem, sive Sphærica, sive Sphæroidica sit

tellus, sive aliam quamcumque rotundam, & curvæ alicujus revolutione genitam figuram habeat, erit semper Meridiani arcus duobus parallellis interjacens, ad semitam a navi percursam in constanti ratione Sinus Totius ad secantem anguli Loxodrimici, & conversim. At Bernoullianum corollarium in tellure sphæroidica non habet locum. Quia enim Meridiani gradus prope æquatorem breviores sunt, & exinde pergendo ad Polos longiores, arcus Meridiani inter duos parallellos circulos latitudine æquidifferentes positus eo erit major, quo parallelli polis propiores sint: Propterea Loxodromias inter duo quæcumque loca latitudine æquidistantia percursas, accedendo ad Polos augeri necesse erit, & in ea quidem ratione, in qua a locis iisdem interceptus Meridiani arcus augetur.

Data jam sit longitudo Loxodromiæ, & rhombi angulus, & quæratur mutatio latitudinis. Erit contraria ratione secans anguli rhombi ad sinum totum, ut Loxodromiæ longitudo, ad Meridiani arcum, parallellis, ex quo navis solvit, & ad quem pervenit, interjacentem. Unde quia Meridiani gradus in quavis latitudine innotescunt, & data prioris parallelli latitudine, & ipsius ab altero distantia, facili approximatione latitudinum utriusque differentia erui poterit. Id quod magis fortasse, quam quæ primo in hoc capite dicta sunt, usuveniet: In praxi enim Loxodromiæ expeditius, per actualem semitæ a navi percursæ mensuram, exhibentur.

Majoris momenti res est, si de invenienda ex mutationibus latitudinum longitudinis mutatione agatur. Hoc celebre, & quovis sæculo decantatum adeo problema est, cujus universalis solutio, & pro omni inopinati venti, ac procellæ casu, tot summorum Mathematicorum ingenia frustra exercuit. Si navis constanti rhombo deferatur, & loci, ex quo primum solvit, latitudo sit data, ita mutatio omnis longitudinis investigabitur. Solvat ipsa ex loco $D$ æquatoris, perveniatque ad parallellum $L\,M$. Parallelli radius sit $y$, perpendicularis a quolibet ejusdem puncto ad planum æquatoris ducta sit $x$, tangens anguli, quo navis Meridianos, singulos secat $t$, sinus totus $T$. Semiaxibus terræ manentibus quibus supra, erit, ut alibi etiam

etiam dictum est,

$$y = \left(\frac{n+b}{n}\right) \surd (n^2 - x^2)$$

$$dy = \frac{-(n+b)\, x dx}{n \surd (n^2 - x^2)}$$

$$dy^2 = \frac{(n + 2b)\, x^2 dx^2:}{n(n^2 - x^2)}$$

At est $ar$ elementum Meridiani terrestris $= \surd (dx^2 + dy^2)$; ergo

$$ar = \surd \left(dx^2 + \frac{(n+2b)\, x^2 dx^2}{n(n^2 - x^2)}\right) = dx \surd \left(\frac{n^3 + 2bx^2}{n(n^2 - x^2)}\right).$$

Porro, quia arcus similes radiorum proportionem sequuntur, erit $\left(\frac{n+b}{n}\right) \surd (n^2 - x^2) : n + b = rR : Cc$. Erit etiam

$T : t = ar : rR$: Unde habebitur

$$rR = \frac{tdx}{T} \surd \left(\frac{n^3 + 2bx^2}{n(n^2 - x^2)}\right)$$

$$Cc = \frac{\frac{tdx}{T} \surd \left(\frac{n^3 + 2bx^2}{n(n^2 - x^2)}\right) \cdot (n+b)}{\left(\frac{n+b}{n}\right) \surd (n^2 - x^2)} = \frac{tndx \surd \left(n^2 + \frac{2bx^2}{n}\right)}{Tn^2 - Tx^2}.$$

Jam vero radicem quadratam extrahendo, negligendoque quantitates omnes ob parvitatem evanescentes, prodit $\surd \left(n^2 + \frac{2bx^2}{n}\right) = n + \frac{bx^2}{n^2}$. Igitur

$$Cc = \frac{tn^2 dx + \frac{tbx^2 dx}{n}}{Tn^2 - Tx^2} = \frac{tn^2 dx}{Tn^2 - Tx^2} + \frac{tbx^2 dx}{Tn^3 - Tnx^2}.$$

Utrius-

Utriusque homogenei comparationis termini integrale Logarithmorum ope erui poterit. Est enim, mutatis signis

$$\frac{tn^2 dx}{Tn^2 - Tx^2} = \frac{-tn^2 dx}{Tx^2 - Tn^2}:$$

Et resolvendo in suos componentes denominatorem

$$\frac{tn^2 dx}{Tn^2 - Tx^2} = -\frac{\frac{tn^2 dx}{T}}{(x+n)(x-n)}:$$

Et fractionem in duas, quas prima tantum ipsius $x$ potestas ingrediatur, resolvendo

$$\frac{tn^2 dx}{Tn^2 - Tx^2} = \frac{-\frac{tn^2 dx}{T}}{-2n(x+n)} - \frac{\frac{tn^2 dx}{T}}{2n(x-n)}$$

$$\frac{tn^2 dx}{Tn^2 - Tx^2} = \frac{tndx}{2Tx + 2Tn} - \frac{tndx}{2Tx - 2Tn}$$

$$S\left(\frac{tn^2 dx}{Tn^2 - Tx^2}\right) = \frac{t}{2T}.l(x+n) - \frac{t}{2T}.l(x-n) = \frac{t}{2T}.l\left(\frac{x+n}{x-n}\right) =$$

$\frac{t}{T}.l\sqrt{\left(\frac{x+n}{x-n}\right)}$, in Logarithmica, cujus subtangens sit $n$.

Simili artificio prodibit

$$\frac{tbx^2 dx}{Tn^3 - Tnx^2} = \frac{-tbx^2 dx}{Tnx^2 - Tn^3} = \frac{-tbdx}{Tn} - \frac{tbn^2 dx}{Tnx^2 - Tn^3} =$$

$$\frac{-tbdx}{Tn} - \frac{tbndx}{Tx^2 - Tn^2} = \frac{-tbdx}{Tn} - \frac{\frac{tbndx}{T}}{(x+n)(x-n)} =$$

$$\frac{-tbdx}{Tn} - \frac{\frac{tbndx}{T}}{-2n(x+n)} - \frac{\frac{tbndx}{T}}{2n(x-n)} =$$

$$\frac{-tbdx}{Tn} + \frac{tbdx}{2Tx + 2Tn} - \frac{tbdx}{2Tx - 2Tn}.$$

Cujus

Cujus integrale in Logarithmica ejusdem subtangentis est

$$-\frac{tbx}{Tn}+\frac{tb.}{2Tn}l(x+n)-\frac{tb.}{2Tn}l(x-n)\text{, sive}$$

$$-\frac{tbx}{Tn}+\frac{tb.}{Tn}l\sqrt{\frac{(x+n)}{(x-n)}}.$$

Constans in utroque casu nulla adjici debet, quia ubi $x=0$, integrale etiam totum fit $=0$.

Erit ergo summa omnium $Cc$, sive mutatio longitudinis $\frac{t.}{T}l\sqrt{\frac{(x+n)}{(x-n)}}-\frac{tbx}{Tn}+\frac{tb.}{Tn}l\sqrt{\frac{(x+n)}{(x-n)}}$, aut, quod eodem recidit,

$$\left(\frac{tn+tb}{Tn}\right).l\sqrt{\frac{(x+n)}{(x-n)}}-\frac{tbx}{Tn}:$$

Et hæc ipsa formula est, quam equiti eruditissimo, atque optimo D Josepho Pecis, litteris die 7. Martii anni hujus, quā primum sacrum celebravi, datis, a me biduo ante inventam, aperui. Si navis non amplius ex æquatore, sed ex alio aliquo parallello $TB$, & ex loco $A$ solvat, dicaturque perpendicularis ex parallello eodem in æquatoris planum dimissa, z, eadem ratione habebitur pro totali longitudinis mutatione, dum ex $A$ in $a$ transfertur.

$$\left(\frac{tn+tb}{Tn}\right).l\sqrt{\frac{(x+n)}{(x-n)}}-\frac{tbx}{Tn}-\left(\frac{tn+tb}{Tn}\right).l\sqrt{\frac{(z+n)}{(z-n)}}+\frac{tbz}{Tn}:$$

Unde cum supra in cap. 6. positum fuerit

$$x=\frac{Tn^2}{2Sb}-\sqrt{\left(\frac{n^2-n^3}{b}+\frac{T^2n^4}{4S^2b^2}\right)}\text{, \& extracta radice}$$

$$x=\frac{Sn}{T}-\frac{Sb}{T}+\frac{S^3b}{T^3};$$

Ex data latitudine locorum $A$, & $a$, ipsi $x$, & z, & mutatio omnis longitudinis, navi ex $A$ in $a$ transeunte, facta innotescet. Eadem formula inveniendæ eidem mutationi inserviet si navis, ex $a$ in $A$, contrario tramite, vel etiam in $D$ revertatur. Lo-

Locorum etiam quorumlibet distantiæ a centro, & differentiæ distantiarum ex datis locorum latitudinibus dabuntur. Est enim, fig. 7. tab. 3.,

$$CD = n + b - \frac{bx^2}{n^2} = n + b - \frac{bS^2}{T_2};$$

hoc est differentia altitudinum Terræ in locis $H$, & $C$ quadrati sinus recti latitudinis proportionalis est, adeoque determinata latitudine determinabitur. In eadem ratione erunt differentiæ parallaxium Horizontalium sub æquatore, & alio quovis loco $C$ observatarum, ut patet. Id autem, cujusnam usus in Astronomia esse possit, viderint alii. Expectamus ipsi, quæ ex Promontorio Bonæ spei Cl. de la Caille, ex & Borealibus Europæ partibus alii deferent, illuc nuper observandorum Lunarium motuum gratia profecti. Cæterum, quia, si duo extra æquatorem loca, in terrestri superficie assumantur, & sinus latitudinis loci ab æquatore remotioris dicatur $S$, propioris $s$, erunt parallaxes Horizontales in remotiori, & propiori eodem loco observatæ, ut $n + b - \frac{bS^2}{T^2}$, & $n + b - \frac{bs^2}{T^2}$, & parallaxium differentia ad parallaxim observatam in loco hoc posteriori, ut $\frac{bS^2 - bs^2}{T^2} : n + b - \frac{bs^2}{T^2}$: Ubi ponamus D. De la Caille circa 35° lat., observationes suas peragere, alios vero ad 66° 48′ pervenire, erit parallaxium Horizontalium differentia ad parallaxim circa promontorium bonæ spei observatam, ut

$$8448\frac{0969970609 - 3289898866}{10000000000}3696 : 230 - \frac{32898988663696}{100000000000}$$

$$= 5158198130690 3 : 22967101011336303 = 1 : 445:$$

Propterea si Lunæ parallaxis mediocris statuatur 58′, erit parallaxium duarum Horizontalium in duobus iis locis observatarum differentia 7″ circiter; quæ quidem quantitas nimis exigua videri merito potest, quam ut quidquam exinde possit con-

concludi. Non ergo est cur ulterius in iis disquisitionibus immoremur, cum vix ullius usus, in promovenda, absolvendaque Lunæ theoria esse hæc possit telluris nostræ figura. Singularia sunt tamen, quæ hacce in re edidit Maupertuisius. Ipse videatur.



## CAPUT DECIMUM.

### *De theoriæ, & observationum consensu.*

AT demum ad id veniamus, quod rei totius caput, & summa est, videamusque quæ sit theoriæ hactenus traditæ, & observationum consensio. Primo, quia telluris nostræ figuram Sphæroidem esse, revolutione Ellipseos Apollonianæ circa axem minorem, genitam cap. 7. demonstratum est, erunt per cap. 6. ponderum incrementa pergendo ab æquatore ad Polos, & incrementa longitudinum pendulorum eodem tempore oscillationes suas absolventium, quadratis sinuum rectorum latitudinum proportionalia. Jam vero longitudo penduli simplicis singulis secundis vibrantis sub æquatore, ut cap. 1. vidimus, assumi potest lin. 439. 36, Romæ 440. 28, Parisiis 440. 57, Londini 440. 64, Kittis 441. 17: Sunt ergo longitudinis ejusdem penduli incrementa in latit. 41°. 44′, 48° 50′, 51° 31′, 66° 48′, 0. 92, 1. 21, 1. 28, 1. 81. Porro, quia quadrata sinuum rectorum iis latitudinibus respondentium sunt, 4431093596. 9316, 5667048288. 0400, 6127589316. 3664, 8448096997. 0609; ex theoria nostra esse deberent eadem incrementa 0. 92, 1. 17, 1. 27, 1. 75. Si longitudo penduli sub æquatore lin. 439. 21 cum Cl. Bouguerio statueretur, forent ex observationibus eadem incrementa 1. 07, 1. 36, 1. 43, 1. 96: Ex theoria esse deberent 1. 07, 1. 37, 1. 47, 2. 03. In utroque casu maxima theoriæ, & observationum dissensio haberetur comparando longitudinem Romani penduli cum longitudine penduli alterius synchroni in lat. 66° 48′: Ea tamen 0. 07 lineæ unius non excederet, & ubi in tres partes distributa, observationum sub æquatore, Romæ, & in jam dicta latitudine institutarum erroribus tribueretur, errorem triplo minorem in singulis argueret.

Verum enim vero tam exiguos errores in observationibus iisdem, licet diligentissime institutis suspicari merito licere;

ex

ex ipsa instituendarum observationum methodo evidens fit. Videatur, quod in ingeniosissima disertatione nuper Romæ edita celeberrimus Boscovik habuit ipsarum observationum examen. Evidenter etiam colligitur ex aliquali, quæ in repetitis, & similiter sumptis observationibus animadvertitur, dissensione. Exemplum demus. Quum Romæ accuratissimis instrumentis summi homines Le Seur, & Jacquier ex Minimorum Ordine, ac Boscovik, & Maire ex Societate Jesu, determinandæ longitudini penduli, singulis secundis temporis oscillantis diligentissime operam darent, observationibus die 13. Julii, mane institutis eam definierunt digitorum Londinensium 39. 09736: Vespere autem 39. 0941. Sequenti die prodiit longitudo eadem dig. Londin. 39. 09827: Die 16. ipsius mensis, 39. 09703: Die 19, 39. 096485: Die 5. Augusti 39. 097872. Observationum die 13. Julii vespere, & die 14. habitarum dissensio est 0. 00417. dig. Londin., seu lin. 0. 05004, aut, quia pes Londinensis ad Parisiensem ex Bouguerio est, ut $1351\frac{1}{3}$ : 1440, linearum Parisiensium 0. 05332. Non est ergo cur amplius dubitemus eas esse dumtaxat theoriæ nostræ, & observationum differentiunculas, quæ inevitabilibus, ac minimis observationum earumdem erroribus debentur.

Quod si in longitudine penduli singulis secundis temporis sub æquatore oscillantis scrupulus sit, utpote in qua determinanda major patet observationum dissensio; ita ab eadem præscindi poterit. Sint ad confusionem vitandam tria pendula $A$, $B$, $C$, in tribus diversis locis isochrona, & sinus latitudinum respectivarum dicantur $a$, $b$, & $c$. Sit etiam aliud pendulum $D$ sub æquatore Juxta theoriam hactenus traditam haberetur

$A - D : B - D = a^2 : b^2$

$A - B : B - D = a^2 - b^2 : b^2$: Esset etiam

$B - D : C - D = b^2 : c^2$

$B - D : B - C = b^2 : b^2 - c^2$: Propterea

$A - B : B - C = a^2 - b^2 : b^2 - c^2$

$A - B : A - C = a^2 - b^2 : a^2 - c^2$:

L 2 Hoc

Hæc eſt exceſſus longitudinis penduli alicujus ſupra duorum pendulorum in aliis quibuſvis locis æquali tempore oſcillantium longitudines, erunt inter ſe ut differentiæ quadratorum ſinuum reſpectivis latitudinibus reſpondentium: Id quod obſervationibus ſatis congruit. Sumantur ex. gr. tria pendula Kittis, Londini, & Pariſiis ſynchrona. Quoniam differentia penduli Pariſienſis, & penduli Kittis poſiti eſt lin. 0. 60, & quadrata ſinuum lat. 66° 48′, 51° 31′, 48° 50′ ſunt 8448096997.0609, 6127589316. 3664, 5667048288. 0400, differentia vero primi, & ſecundi quadrati eſt 2320507680. 6945, differentia primi, & tertii 2781048709. 0209, fiat

2781048709. 0209 : 2320507680. 6945 = 0. 60 : 0. 50:

Hæc erit differentia pendulorum Kittis, & Londini poſitorum, & longitudo penduli Londinenſis erit lin. 440. 67, major lin. 0. 03 quam ſupra ex obſervationibus ſtatuta ſit. Idem de aliis omnibus locis dicas.

Simili artificio ex accuratioribus obſervationibus citra æquatorem inſtitutis determinari poterunt longitudines pendulorum pro quibuſvis latitudinibus. Erit enim

$$(A - B).(a^2 - c^2) = (A - C).(a^2 - b^2)$$

$$Aa^2 - Ac^2 - Ba^2 + Bc^2 = Aa^2 - Ab^2 - Ca^2 + Cb^2$$

$$Ab^2 - Ac^2 = Ba^2 - Bc^2 + Cb^2 - Ca^2$$

$$A = \frac{B.(a^2 - c^2) - C.(a^2 - b^2)}{b^2 - c^2}.$$

Ita ſi quæratur longitudo totalis penduli ſub polis ſynchroni pendulis Londinenſi, & Pariſienſi, fiet

$$A = \frac{440.64\,(4332951711.9600) - 440.57\,(3872410683.6336)}{460541028.3264}$$

$$A = 441.22.$$

Hinc patet longitudines pendulorum, & pondera ſub æquatore, & polis terræ proxime eſſe inter ſe, ut 229 : 230, & propterea altitudines ſupra centrum, quæ ponderum eorum reciprocam proportionem ſequuntur, ſive ſemiaxem terræ, & ſemi-

semidiametrum semiaxi perpendicularem esse inter se ut 229 : 230, quemadmodum a nobis supra cap. 7, & a Newtono prop. 19. lib. 3. definitum est. Si longitudo penduli sub æquatore esset lin. 439. $\frac{3019}{115}$, eadem proportio accurate obtineret: Si assumatur lin. 439. 36, ut supra fecimus ipsi, aut cum Bouguerio statuatur lin. 439. 21, dissensio theoriæ, & observationum in priori casu evadet lin. o. 06, in altero o. 09 circiter, quæ postmodum per alias observationes pendulorum, Londinensis, & Parisiensis, ex quibus longitudo penduli sub polis synchroni a nobis eruta est, distributa, errorem in singulis o. 02, aut o. 03 lineæ unius daret. Nemo hactenus, quod sciam, observationum suarum exactitudinem eo extulit, ut errores tam exiguos præcaveri in iis potuisse affirmaret. Liquet ergo quam bene decimænonæ libri tertii Princip. Mathem. Newtoni prop. Bernoullianum elogium quadret: „ Quant à son raisonnement, „ il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce „ grand homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre „ ne distingue qu'à peine avec un Microscope. (*a*)

Ad terrestres gradus quod pertinet, vidimus nihil ex iis, qui dependenter a locorum longitudine, determinati sunt, aut in confutationem, aut in patrocinium theoriæ posse erui. Circuli ad æquatorem parallelli gradus in lat. 43° 32′ non nisi hexapedis 30 major accuratioribus observationibus deprehensus est, quam ipsi calculo definivimus. Simili modo meridiani gradum sub æquatore cum Illustrissimis Gallis statuendo hex. 56753, in lat. 45°, hexap. 57124 calculo erutus est, 24 scilicet hex. major, quam juxta Cassini mensuras assumi debeat: In lat. 66° 20′ pariter calculo prodiit hex. 57376, minor 24 hexap., quam Cl. De Maupertuis, & sodalibus celeberrimis prodierit: Unde, quum hic tam exiguo defectu, illic non majori excessu a theoria discrepent observationes, ipsi optime consentientes fatendæ erunt. In lat. 53° gradus unius mensura ex

(*a*) Dan. Bern. trait. sur le flu. & refl. cor. 8. prop. 7. chap. 2.

ex theoria eſt hexap. 57226, ex Nervoodi obſervationibus hexap. 57300: Differentia hexap. 74 eſt, non major ſcilicet, quam quæ in errores inevitabiles citra ullam obſervationum, & obſervatorum diligentiſſimorum injuriam refundi poteſt. In memoriam hic revocentur, quæ ipſi ſupra in anteceſſione noſtra elucubravimus. Quid plura? In lat. 49° 22′ gradus ex theoria eſt hex. 57181, ex Maupertuiſii obſervationibus 57183. En mira prorſus theoriæ, & obſervationum conſenſio!

F I N I S.



*Die 5. Novembris 1751.*

*IMPRIMATUR.*

*F. Jo: Baptista* Wahemans *Ord. Præd. Sac. Theol. Mag. Commissarius S. Offitii Mediolani.*

*Franciscus Curionus Archipresbyter S. Eusebii pro Eminentiss. & Reverendiss. D. D. Card. Archiepisc.*

*Vidit Julius Cæsar Bersanus pro Excellentissimo Senatu.*

Tab. 2

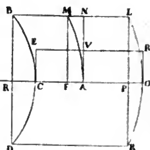



Fig. 2.

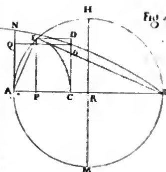
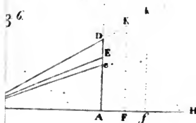
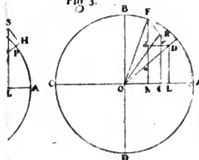


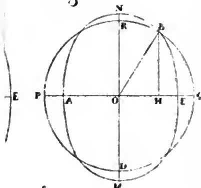

Fig 4

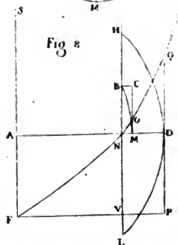



g 6.

Tab 1.

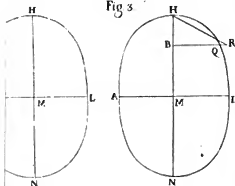


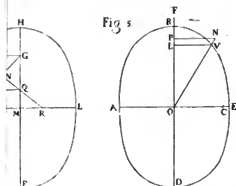




M. A. Balke sc.

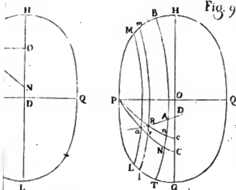
Tab. 3.



H
M
L
N
Fig. 3.
H
B
R
Q
A
M
L
N

H
G
N
Q
M
R
L
F
Fig. 5.
F
R
P
N
L
V
A
O
C
E
D

H
O
N
D
Q
L
Fig. 9.
B
H
M
m
P
O
Q
A
D
R
a
r
n
c
N
C
L
l
T
G

